



# Statische Festigkeitsberechnung einer 5-Speichen Fahrradfelge aus Faserverbundkunststoff

Thomas König,  
Manfred Hahn

---

Schriftenreihe der Wilhelm Büchner Hochschule

Ausgabe 5 / 2022



Thomas König, Manfred Hahn

# **Schriftenreihe der Wilhelm Büchner Hochschule**

Herausgeber Forschungsausschuss der Wilhelm Büchner Hochschule  
05.03.2022

**Wilhelm Büchner Hochschule**

# Impressum

ISSN (Online) 2751-0514

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

©Wilhelm Büchner Hochschule Darmstadt 2022

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Werden Personenbezeichnungen aus Gründen der besseren Lesbarkeit nur in der männlichen oder weiblichen Form verwendet, so schließt dies das jeweils andere Geschlecht mit ein.

*Herausgeber:* Forschungsausschuss der Wilhelm Büchner Hochschule

*Redaktion:* Dr. Marcel Heber

*Layout und Satz:* Dominik Feldmeier

*Einbandentwurf:* Gerhard Kienzle

*Projektkoordination:* Prof. Dr. Rainer Eisland

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

# Statische Festigkeitsberechnung einer 5-Speichen Fahrradfelge aus Faserverbundkunststoff

Thomas König, Manfred Hahn

**Zusammenfassung** Ziel dieser Arbeit ist es, die inneren Beanspruchungen eines 5-speichigen Laufrads für Mountainbikes zu berechnen. Das gesamte Laufrad ist aus einem mehrschichtigen Laminat aufgebaut, welches aus Kohlenstofffasern mit Epoxidharz besteht. Das Laminat setzt sich aus sieben UD-Schichten und einer  $\pm 90^\circ$ -Gewebeschicht zusammen. Die Geometrie ist stark an ein auf dem Markt vorhandenes Laufrad angelehnt. Für die Berechnung wird das Prinzip der virtuellen Kräfte benutzt. Dabei werden nur Belastungen in der Ebene, welche rechtwinklig zur Laufradachse steht, betrachtet. Die eingeleiteten äußeren Kräfte beschränken sich auf rein statische Belastungen infolge der Gesamtmasse von Fahrer und Fahrrad beim Bremsvorgang. Die Berechnung an sich wird mit Hilfe des Computer-Algebra-Programms „Maxima“ durchgeführt. Ein Vergleich unterschiedlicher Felgen- und Speichen-Geometrien, sowie des Laminataufbaus, zeigen die Einflüsse auf die auftretenden Dehnungen und somit Spannungen im Laufrad. Aus diesem Vergleich lässt sich, bezüglich Steifigkeit und Masse, eine optimale Geometrie bestimmen. Diese besteht aus einer Felgengeometrie mit einer Höhe von 22,3 mm ohne Felgenhorn und einer Breite von 36 mm. Die Speichen sind rohrförmig mit einem Außendurchmesser von 12 mm. Mit dieser Kombination lässt sich ein Gewicht von 570 g erreichen, wobei die maximalen Dehnungen im gesamten Laufrad 0,26 % und die maximalen Stauchungen im gesamten Laufrad  $-0,25$  % betragen. Aufgrund von fehlender Festigkeitswerte des Laminats kann die Festigkeitsanalyse nur unzureichend durchgeführt werden. Eine erste Abschätzung zeigt, dass das so konzipierte Laufrad bei den betrachteten Belastungen ausreichend Sicherheit gegen Bruch bietet.

**Keywords:** Faserverbundkunststoff, statische Berechnung, klassische Laminattheorie, Prinzip der virtuellen Kräfte, Mountainbike Laufrad

**Abstract** The aim of this thesis is to calculate the loads of a 5-spoke wheel for mountain bikes. The entire wheel is made of a multilayer laminate consisting of carbon fibers with epoxy resin. The laminate is composed of seven UD layers and a  $\pm 90^\circ$  fabric layer. The geometry is very similar to wheels available on the market. For the calculation the principle of virtual forces is used. Only loads in the plane are considered. The external forces introduced are limited to purely static loads due to the total mass of rider and bicycle during braking. The calculation itself is performed by using of the computer algebra program Maxima. A comparison of different rim and spoke geometries, as well as the laminate structure, shows the influences on the strains and thus stresses occurring in the wheel. From this comparison, an optimal geometry can be determined with regard to stiffness and mass. This consists of a rim geometry with a height of 22,3 mm without rim flange and a width of 36 mm. The spokes are tubes with an outer diameter of 12 mm. With this combination, a weight of 570 g can be achieved, with maximum elongation in the entire wheel of 0,26 % and maximum compression in the entire wheel of -0,25 %. Due to missing strength values of the laminate, the strength analysis can only be carried out inadequately. A first estimation shows that the impeller designed in this way, is sufficient safety against breakage at the loads considered.

**Keywords:** fibre-reinforced plastic, static calculation, classical laminate theory, Principle of virtual forces, mountain bike wheel

---

## Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	1
2	Stand der Technik.....	1
	2.1 Faserverbundkunststoffe (FVK).....	2
	2.1.1 Matrix.....	2
	2.1.2 Fasern.....	4
	2.1.3 Fertigungsverfahren.....	7
	2.1.4 Einsatzgebiete.....	10
	2.2 Das Laufrad eines Fahrrads.....	12
	2.2.1 Zugspeichenrad, Scheibenrad, Druckspeichenrad.....	12
	2.2.2 Druckspeichenlaufrad für Mountainbikes aus CFK.....	14
	2.2.3 Belastungen am Laufrad.....	16
	2.2.4 Prüfungen für Laufräder und Felgen.....	18
3	Theoretische Grundlagen.....	19
	3.1 Schnittgrößen.....	20
	3.2 Statische Bestimmtheit.....	21
	3.3 Das Prinzip der virtuellen Arbeit.....	23
	3.3.1 Das Prinzip der virtuellen Kräfte.....	23
	3.3.2 Lösen statisch unbestimmter Systeme mit Hilfe virtueller Kräfte.....	25
	3.4 Auslegung von Mehrschichtverbund Laminaten.....	28
	3.4.1 Bestimmung der Grundelastizitätsgrößen der Einzelschicht.....	29
	3.4.2 Dehnungen und Spannung aufgrund von Biegung und Zug/Druck.....	34
	3.4.3 Versagensarten von UD-Schichten.....	37
	3.4.4 Festigkeitsanalyse von Laminaten.....	41
	3.4.5 Optimierungsmöglichkeiten.....	43
4	Randbedingungen für die Berechnung.....	44
	4.1 Geometrische Form und Laminataufbau des Laufrads.....	44
	4.2 Materialeigenschaften.....	47
	4.2.1 Eigenschaften der Einzelschichten im Schicht-Koordinatensystem.....	47

---

4.2.2	Eigenschaften der Einzelschichten im Laminat-Koordinatensystem.....	52
4.3	Äußere Kräfte am Laufrad.....	55
4.3.1	Radiale Belastung.....	55
4.3.2	Tangentiale Belastung.....	56
4.3.3	Stoßbelastung.....	58
5	Berechnungsdurchführung.....	58
5.1	Berechnung mit Hilfe von Maxima.....	60
5.2	Vorbereitung.....	60
5.2.1	Bestimmung der äußeren und innerlichen statischen Bestimmtheit.....	61
5.2.2	Berechnung der Eigenschaften des Laufrads.....	63
5.2.3	Aufstellen der Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe.....	65
5.3	Durchführung der Berechnung.....	69
5.3.1	Berechnung der Verschiebungen.....	70
5.3.2	Berechnung der tatsächlichen Kraftkomponenten.....	72
5.3.3	Berechnung der tatsächlichen Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe.....	73
5.4	Nachlaufrechnung.....	75
5.4.1	Dehnungen.....	75
5.4.2	Maximale Schichtspannung.....	80
5.5	Plausibilitätsprüfung der durchgeführten Berechnung.....	83
5.6	Variantenübersicht.....	83
5.6.1	Mit Bremskraft.....	84
5.6.2	Felgenprofil.....	86
5.6.3	Speichenprofil.....	87
5.6.4	Laminataufbau.....	88
6	Ergebnisse aus der Berechnung.....	88
6.1	Dehnungen und Spannungen <u>ohne</u> Bremskraft.....	89
6.2	Dehnungen und Spannungen <u>mit</u> Bremskraft.....	91
6.3	Einfluss des Felgen- und Speichenprofils.....	94
6.4	Einfluss des Laminataufbaus.....	98

---

---

7	Festigkeitsnachweis.....	101
8	Ergebnis .....	103
	8.1 Berechnungsmethode.....	103
	8.2 Idealer Kompromiss aus Masse und Steifigkeit.....	104
	8.3 Festigkeitsnachweis.....	106
9	Diskussion, Fazit und Ausblick.....	106
	9.1 Diskussion .....	107
	9.2 Fazit.....	108
	9.3 Ausblick .....	109
	Literaturverzeichnis .....	111
B.	Anhang .....	114
	B.1 Berechnung der in das Laminat-KOS transformierten Steifigkeitsgrößen der $\pm 90^\circ$ Schicht.....	114
	B.2 Momentenverläufe mit virtuellen Kräften.....	116
	B.3 Normalkraftverläufe mit virtuellen Kräften .....	120
	B.4 Querkraftverläufe mit virtuellen Kräften.....	124
	B.5 Berechnete Verschiebungen .....	128
	B.6 Funktionen des tatsächlichen Momenten-, Normalkraft und Querkraftverlauf .....	129
	B.7 Funktionen im „0-System“ zum Momenten-, Normalkraft und Querkraftverlauf für die Variante „mit Bremskraft“ .....	130
	B.8 Geometrische Schichteigenschaften der unterschiedlichen Felgenprofilvarianten .	131
	B.9 Geometrische Schichteigenschaften der unterschiedlichen Felgenprofilvarianten .	131
	B.10 Geometrische Schichteigenschaften der Gesamt-UD Schicht mit unterschiedlicher Einzel-UD-Schichtanzahl .....	132
	B.11 Maximale Dehnungen im Laufrad bei den unterschiedlichen Geometrievarianten-Kombinationen.....	133
	B.12 Maximale Stauchungen im Laufrad bei den unterschiedlichen Geometrievarianten-Kombinationen.....	133
	B.13 Masse des Laufrads bei den unterschiedlichen Kombinationen der Geometrievarianten.....	133
	B.14 Dehnungsverläufe ausgewählter Kombinationen von Felgen und Speichengeometrien mit Bremskraft.....	134

---

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 a UD-Schicht b Laminat aus mehreren miteinander verklebten UD-Einzelschichten mit unterschiedliche Faserausrichtung [2, S. 15] .....	3
Abbildung 2 : Festigkeit in Abhängig zum Faserdurchmesser am Beispiel einer Glasfaser [2, S. 22].....	5
Abbildung 3 Profil-Halbzeuge von R&G aus Faserverbundkunststoff [5] .....	9
Abbildung 4 : Leinwandbindung (Links), Köperbindung (Mitte) und Atlasbindung (Rechts) [3, S. 150-151].....	10
Abbildung 5 Fahrradrahmen in Muffenbauweise (links), Tube-to-Tube-Bauweise (mitte) und Mono-coque-Bauweise (rechts) [6, S. 180-181].....	11
Abbildung 6 : Einzelteile eines Zugspeichen-Laufrads mit Reifen [8].....	12
Abbildung 7 Spannungen im Druckspeichenrad [6, S. 260] .....	13
Abbildung 8 Äußere Kräfte am Laufrad [6, S. 261] .....	17
Abbildung 9 : Statische Festigkeitsprüfung des Laufrads [13, S. 8] .....	18
Abbildung 10 Aufbau dynamische Prüfung von City- und Trekkingfahrrädern [13, S. 11] .....	19
Abbildung 11 Vorzeichendefinition der unterschiedlichen Schnittrufer mit Bezugsfaser. [Eigene Darstellung gemäß [15, S. 93] und [15, S. 97]] .....	20
Abbildung 12 a) innerlich und äußerlich 3-fach statisch unbestimmter Rahmen, b) äußerlich statisch bestimmter Rahmen, c) - e) Auswahl an Möglichkeiten zur Übertragung in innerlich statisch bestimmte Teilsysteme. [Eigene Darstellung in Anlehnung an [16, S. 132]] .....	22
Abbildung 13 Beispiel-Berechnung der vertikalen Verschiebung im Punkt „i“ durch die Belastung F an der Stelle „k“ [17, S. 222] .....	24
Abbildung 14 : Darstellung der Zusammensetzung von Gesamtdehnung und Gesamtspannung an einem Verbundquerschnitt aufgrund von Biege- und Zugbeanspruchung. [Eigene Darstellung in Anlehnung an [17, S. 277-295]] .....	33
Abbildung 15 Basis-Bbeanspruchungen des UD-Verbunds sowie die jeweils zu erwartende Bruchebene [18, S. 4].....	34
Abbildung 16 Bruchmodus A, B und C mit den dazugehörigen Basisbeanspruchungen $\sigma \perp +$ , $\sigma \perp -$ und $\tau \perp \parallel$ sowie den zu erwartenden Bruchflächen. Abbildung in Anlehnung an [18, S. 61].....	36

---

Abbildung 17 Bruchkurve mit Darstellung der unterschiedlichen Bruchmodi und der Belastungs-kombinationen in denen sie auftreten. Die Darstellung beschreibt den Fall einer UD-Schicht mit ebenem Spannungszustand. [2, S. 425].....	38
Abbildung 18 Prinzipdarstellung des zu berechnenden 5-Speichen-Laufrads aus Faserverbund-kunststoff [Eigene Darstellung] .....	41
Abbildung 19 Darstellung der Felgen und Speichen-Querschnittsgeometrie. [Eigene Darstellung] .....	41
Abbildung 20 Schichtaufbau des Laminats. [Eigene Darstellung] .....	42
Abbildung 21 : Die radiale Kraft auf das Vorderrad ergibt sich aus der Gesamtsystemgewichtskraft (Fahrer, Fahrrad und Gepäck). [6, S. 466].....	50
Abbildung 22 : Berechnung der auf das Vorderrad wirkenden Bremskraft $F_R$ . [Darstellung in Anlehnung an [6, S. 533]] .....	51
Abbildung 23 Übersicht über den Berechnungsablauf. [Eigene Darstellung] .....	53
Abbildung 24 links: Teilsystem Laufrad mit Los- und Festlager, rechts: Äußere Kräfte am freigeschnittenen System ohne Bremskraft. [Eigene Darstellung] .....	55
Abbildung 25 Links: Festlegung und Beschreibung der Laufradabschnitte mit Schnitten für die innerlich statische Bestimmtheit und Definition der Zug-/ Druck-Beanspruchungen durch eine gestrichelte Bezugsfaser. Rechts: Beschreibung der Speichen und Felgenabschnitte durch Variable. [Eigene Darstellung].....	57
Abbildung 26 Nomenklatur der Bezeichnung von Kraft- und Momentenverläufen. [Eigene Darstellung] .....	60
Abbildung 27 oben links: „0-System“ mit der angreifenden äußeren Last „F“, oben rechts: „1-System“ mit virtueller Belastung $X_1$ , unten links: „2-System“ mit virtueller Belastung $X_2$ , unten rechts: „3-System“ mit virtueller Belastung $X_3$ . Alle Darstellungen zeigen qualitativ den in Folge der eingebrachten Belastung entstehende Momentenverlauf des Laufrads. [Eigene Darstellung] .....	61
Abbildung 28 „0-System“ mit links: Normalkraftverlauf und rechts: Querkraftverlauf in Folge der äußeren radialen Belastung „F“. [Eigene Darstellung] .....	62
Abbildung 29 Qualitativ dargestellter tatsächlicher Momenten- und Normalkraftverlauf über dem gesamten Laufrad. [Eigene Darstellung] .....	67
Abbildung 30 Qualitativ dargestellter tatsächlicher Querkraftverlauf über dem gesamten Laufrad. [Eigene Darstellung] .....	68
Abbildung 31 Stellen maximaler Dehnung bzw. Stauchung am Felgen- und Speichengeometriequerschnitt [Eigene Darstellung].....	69

---

---

Abbildung 32 Unterscheidung der Profilbereiche in „Innen“ und „Außen“ zur Bestimmung der unterschiedlichen Dehnungen bzw. Stauchungen. [Eigene Darstellung].....	71
Abbildung 33 Stellen der maximalen Dehnung/Stauchung der Gewebeschicht und der UD-Schicht in einem Schnitt. Abbildung repräsentiert nicht die korrekten Schichtdicken sowie den richtigen Abstand zur neutralen Faser. [Eigene Darstellung].....	72
Abbildung 34 : Darstellung der äußeren Belastungen durch zusätzliche Bremskraft B (oben links). Sowie Darstellung der Momenten- (oben rechts), Normalkraft- (unten links) und Querkraftverläufe (unten rechts) infolge dieser Belastung im „0-System“. [Eigene Darstellung] .....	75
Abbildung 35 Felgenquerschnittsgeometrie Variante „F-14“ (links), Variante „F0“ (Mitte) und „F+20“ (rechts). [Eigene Darstellung].....	76
Abbildung 36 Speichenquerschnittsgeometrie Variante „S12“ (links), Variante „S32“ (Mitte) und „S32+20“ (rechts). [Eigene Darstellung].....	77
Abbildung 37 Dehnungs- und Spannungsverlauf im Laminat an der Stelle maximaler Dehnung ohne Bremskraft. Die Fläche mit Kreuzschraffur stellt die Gewebeschicht dar. Der mit parallelen Linien gefüllt Bereich stellt die 7 UD-Schichten dar. [Eigene Darstellung].....	81
Abbildung 38 Dehnungs- und Spannungsverlauf im Laminat an der Stelle maximaler Dehnung mit Bremskraft. Die Fläche mit Kreuzschraffur stellt die Gewebeschicht dar. Der mit parallelen Linien gefüllte Bereich stellt die 7 UD-Schichten dar. [Eigene Darstellung]...	83

---

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 1 Gegenüberstellung verschiedener Laufräder aus CFK von den beiden Herstellern „all ahead“ und „XeNTiS“. Für Design und Felgengeometrie siehe Tabelle 2 und Tabelle 3 [10, 11] .....	14
Tabelle 2 Vergleich des Designs der Laufräder von den beiden Herstellern „all ahead“ und „XeNTiS“ [10, 12] .....	15
Tabelle 3 Vergleich der Felgengeometrien der Laufräder von den beiden Herstellern „all ahead“ und „XeNTiS“ [10, 12] .....	16
Tabelle 4 Grund-Elastizitätsgrößen für glasfaser- und kohlenstofffaserverstärktes Epoxidharz bei einem Faservolumenanteil von 60 %. [2, S. 202] .....	29
Tabelle 5 Herstellerangaben für das System Harz „L“ + Härter „CL“ [20] .....	43
Tabelle 6 Herstellerangaben des UD-Geleges „Kohlegelege ST 100 g/m <sup>2</sup> “ [21] .....	44
Tabelle 7 Herstellerangaben des ±90°-Gewebes „Kohlegewebe 285 g/m <sup>2</sup> (Köper 4/4)“ [23] .....	45
Tabelle 8 E-Modul und Schubmodul der Einzelschichten im Laminat-Koordinatensystem....	49
Tabelle 9 Fläche, Flächenschwerpunkt und Flächenträgheitsmoment der Gesamt-UD-Schicht und der Gewebesicht .....	58
Tabelle 10 : Berechnete Eigenschaften des Gesamtquerschnitts der Felge und Speiche unter Berücksichtigung der Geometrie und des Laminataufbaus. ....	59
Tabelle 11 Momenten-, Normal- und Querkraftverläufe des „0-“ und „1-Systems“ als Funktion. Die Funktionen sind abhängig von $\varphi_n$ bzw. $x_n$ . Die Variable $r$ stelle die ideale Faser dar ( $r=z_{ges}$ ). ....	63
Tabelle 12 : tatsächliche innere Kraftkomponenten $Z_1$ bis $Z_{15}$ am Laufrad .....	66
Tabelle 13 Definition der Farbe und Form der Markierungen in den Diagrammen Diagramm 4 und Diagramm 5. ....	87
Tabelle 14 Maximale Dehnungen und Stauchungen aus den Berechnungsergebnissen von Kapitel 6. ....	90
Tabelle 15 Gegenüberstellung der Spannungen aufgrund der maximalen Dehnung und der Zugfestigkeitswerte von Matrixwerkstoff und Fasermaterial. ....	91
Tabelle 16 Vergleich der Dehnungen und Massen von Variante „F0 / S12“ (sieben UD- .....	94

---

## Diagrammverzeichnis

Diagramm 1 Gegenüberstellung ausgewählter Eigenschaften von Glas-, Kohle-, Aramid- und Stahlfasern (Maximalwerte)[Eigene Darstellung] [3, S. 143].....	7
Diagramm 2 Die verschiedenen Diagramme zeigen die Dehnungen in den einzelnen Laufrad- abschnitten in Folge radialer Belastung. Es wird unterschieden zwischen den Dehnungen „In- nen“ (Oben) und „Außen“ (Unten). Auf der linken Seite sind die Speichen dargestellt, auf der rechten die Felgenabschnitte [Eigene Darstellung].....	79
Diagramm 3 Die verschiedenen Diagramme zeigen die Dehnungen in den einzelnen Laufrad- abschnitten infolge der radialen Belastung sowie der tangentialen Bremskraft. Es wird unter- schieden zwischen den Dehnungen „Innen“ (Oben) und „Außen“ (Unten). Auf der linken Seite sind die Speichen dargestellt, auf der rechten die Felgenabschnitte [Eigene Darstel- lung].....	82
Diagramm 4 Maximale Stauchung im gesamten Laufrad bei unterschiedlichen Felgen- und Speichen-geometrien. Daten siehe Anhang B.12. [Eigene Darstellung].....	85
Diagramm 5 Maximale Stauchung im gesamten Laufrad bei unterschiedlichen Felgen- und Speichen-geometrien. Daten siehe Anhang B.12. [Eigene Darstellung].....	86
Diagramm 6 Masse des gesamten Laufrades in Abhängigkeit von Felgen- und Speichengeo- metrie. Daten siehe Anhang B.13.....	87
Diagramm 7 Links: Maximale Dehnung und Stauchung im Laufrad bei unterschiedlicher An- zahl von UD-Schichten. Rechts: Laufradmasse bei unterschiedlicher Anzahl von UD-Schich- ten.....	88
Diagramm 8 Dehnungsverläufe bei nur einer UD-Schicht. Die Verläufe zeigen die Dehnungen über den verschiedenen Laufradabschnitten. Es wird unterschieden zwischen den Dehnungen „Innen“ (oben) und „Außen“ (unten). [Eigene Darstellung].....	89

---

## 1 Einleitung

Herkömmliche Fahrräder bestehen zum Großteil aus Aluminium. Um Masse einsparen zu können, setzen viele Hersteller auf Bauteile aus Faserverbundwerkstoffen. In erster Linie ist dieser Trend bei Rennrädern zu erkennen. Aus Faserverbundwerkstoffen hergestellte Komponenten verfügen über hohe Steifigkeiten bei gleichzeitig geringer Masse. Die genannten Eigenschaften sind gerade für den Profiradsport entscheidende Kriterien.

Um eine neue Komponente im Entwicklungsprozess bereits frühzeitig aus Festigkeitssicht abzusichern, können Festigkeitsberechnungen durchgeführt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Mountainbike-Laufrad mit fünf Speichen betrachtet. Für Mountainbike-Laufräder aus Faserverbundkunststoffen gibt es nur wenige Anbieter auf dem Markt. Für die Berechnung kann das Prinzip der virtuellen Kräfte genutzt werden. Dieser Berechnungsansatz ist für Handrechnungen geeigneter als die komplexe Durchführung einer Finite-Elemente-Methode-Berechnung. Mit Hilfe dieser Berechnung können die inneren Beanspruchungen berechnet werden. Ziel dieser Arbeit ist es, die statische Festigkeit eines 5-speichigen Vollcarbon-Laufrads für Mountainbikes nachzuweisen und durch Variation der Geometrie und des Laminataufbaus einen optimalen Kompromiss zwischen Masse, Steifigkeit und Festigkeit zu finden.

Die Berechnungen werden mit Hilfe des Computer-Algebra-Programms „Maxima“ durchgeführt. Die Berechnung wird so aufgebaut, dass durch Änderung von Parametern verschiedene Geometrien sowie Laminataufbauten berechnet und gegenübergestellt werden können. Material- und Festigkeitskennwerte werden aus geeigneter Literatur beziehungsweise Herstellerangaben entnommen.

## 2 Stand der Technik

Zu Beginn dieser Arbeit wird der aktuelle Stand der Technik vorgestellt. Untergliedert wird dieses Kapitel in die beiden Hauptthemen: „Faserverbundkunststoffe“ und „Das Laufrad eines Fahrrads“.

Im ersten Abschnitt „Faserverbundwerkstoffe“, werden die Einzelkomponenten von Faserverbundkunststoffen (FVK) aufgezeigt und gegenübergestellt. Diese sind die Matrix und die Fasern, welche in der Matrix eingebettet sind. Zudem werden Fertigungsverfahren und mögliche Einsatzgebiete von Bauteilen aus Faserverbundkunststoff präsentiert.

Im zweiten Abschnitt „Das Laufrad eines Fahrrads“, wird der grundsätzliche Aufbau eines Laufrades von Fahrrädern vorgestellt. In diesem Zusammenhang wird auf die verschiedenen Bauarten näher eingegangen: das Zugspeichenrad, das Scheibenrad und das in dieser Arbeit zu behandelnde Druckspeichenrad. Im Anschluss werden die aktuell auf dem Markt verfügbaren

Laufräder für Mountainbikes aus FVK abgebildet und verglichen. Am Ende werden die typischen Belastungen und die dazu passenden Prüfmethode nach DIN EN ISO 4210 geschildert.

## **2.1 Faserverbundkunststoffe (FVK)**

Verbundwerkstoffe sind Kombinationen aus verschiedenen Komponenten, welche meist aus unterschiedlichem Material bestehen. Durch gezielte Kombination können Werkstoffe mit ganz bestimmten Eigenschaften erzeugt werden. [1, S. 33]

Bei FVK werden in der Regel hohe Festigkeiten und Steifigkeiten bei gleichzeitig niedrigem Gewicht angestrebt. Vereinfacht dargestellt wird dazu das geringe Gewicht des Kunststoffes mit den hohen Festigkeiten der Fasern kombiniert.

Heutzutage werden unzählige Produkte aus FVK hergestellt. Ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal ist die eingesetzte Faserlänge. Bei einer Faserlänge von unter 1mm ist von Kurzfasern die Rede. Die Festigkeits- und Steifigkeitssteigerung von mit Kurzfasern verstärkten Kunststoffen ist für leicht beanspruchte Teile ausreichend. Der Vorteil von FVK mit Kurzfasern ist die Spritzgussfähigkeit und die damit verbundenen günstigen Herstellungskosten. Bei einer Länge zwischen 1 mm und 50 mm ist von Langfasern die Rede. Fasern die länger sind als 50 mm, werden als Endlosfaser bezeichnet. Bauteile mit Endlosfasern zeigen die höchsten Festigkeiten und Steifigkeiten innerhalb der FVK. Aufgrund der aufwendigen Herstellung von Bauteilen mit Endlosfasern sind hierfür die Herstellungskosten am höchsten. [2, S. 137-138]

Um höchste Festigkeiten bei gleichzeitig geringem Gewicht erreichen zu können, wird das in dieser Arbeit zu betrachtende Laufrad aus Endlosfasern bestehen. Aus diesem Grund wird im Folgenden der Schwerpunkt auf FVK mit Endlosfasern gelegt. [2, S. 13]

### **2.1.1 Matrix**

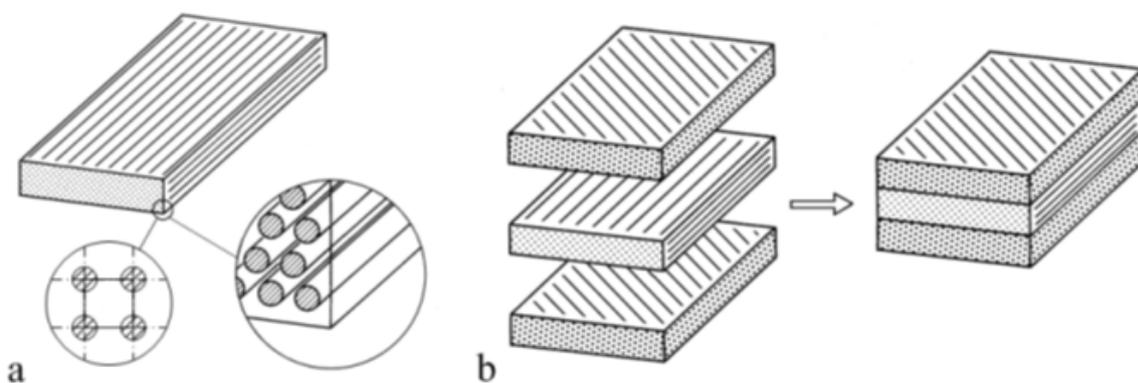
Das Prinzip der Verbindung aus Matrix und Faser ist keinesfalls eine neue Erfindung. Die Natur macht sich dieses Prinzip bereits seit jeher zu nutzen. Beispielsweise sind die tragenden Strukturen einer Pflanze aus Fasern aufgebaut. [2, S. 1]

Eine Verbreitung der Faserverbundwerkstoffe geschah erst mit Hilfe der fortschreitenden Entwicklung von Kunststoffen. Kunststoffe stellen dabei die optimale Matrix für Faserverbundwerkstoffe dar. Neben dem geringen Gewicht und der Korrosionsbeständigkeit von Kunststoffen, bieten diese einen besonders guten Halt für die Fasern. [2, S. 3]

---

Die Aufgabenteilung zwischen Matrix und Faser stellt sich im groben wie folgt dar: die Matrix aus Kunststoff gibt dem Faser-Kunststoff-Verbund die gewünschte Form und hält die eingebetteten Fasern in ihrer Position. Die Fasern selbst dienen der Übertragung von anliegenden Belastungen. Da Fasern nur Zugkräfte aufnehmen können, ist eine korrekte Ausrichtung in der Matrix entscheidend. Diese Eigenschaft stellt auch den großen Unterschied zu metallischen Werkstoffen dar. [2, S. 13]

FVK besitzen anisotrope also richtungsabhängige Materialeigenschaften. Die Materialeigenschaften von metallischen Werkstoffen sind dagegen in der Regel richtungsunabhängig. [2, S. 17]



**Abbildung 1 a UD-Schicht b Laminat aus mehreren miteinander verklebten UD-Einzelschichten mit unterschiedliche Faserausrichtung [2, S. 15]**

Um Belastungen an FVK-Bauteilen nicht nur in eine Richtung aufnehmen zu können, werden mehrere Einzelschichten mit unterschiedlicher Ausrichtung überlagert und verbunden. Eine parallele Ausrichtung der Fasern wird als Unidirektionale (UD)-Schicht bezeichnet (siehe Abbildung 1). Werden mehrere Lagen miteinander verbunden spricht man von Laminaten oder Mehrschicht-Verbunden. Neben UD-Schichten gibt es eine große Vielfalt an weiteren Faserhalbzeugen. Dazu zählen zum Beispiel unterschiedliche Gewebearten oder Vliese. [2, S. 14-15]

Neben der bereits angesprochenen Aufgabe, die Faser im FVK auszurichten und zu positionieren, hat die Matrix noch weitere Funktionen. Die Matrix schützt die Faser vor Umwelteinflüssen. Zudem kann die Matrix die Fasern bei Druckbelastung in Faserrichtung vor Knicken schützen. Auch Kräfte quer zur Faser werden durch die Matrix aufgenommen. Neben der Verklebung der Fasern werden durch die Matrix auch die einzelnen Schichten miteinander verklebt. Die Matrix hat grundsätzlich einen entscheidenden Einfluss auf nahezu alle Eigenschaften des Faserverbundwerkstoffs. Da die Matrix oft das schwächste Glied im Verbundwerkstoff darstellt, ist eine geeignete Auswahl des Matrixwerkstoffes wichtig. Als Kunststoffmatrixmaterialien kommen Duroplaste, Thermoplaste und Elastomere in Betracht. [2, S. 83, 3, S. 18]

**Duroplastische** Matrixsysteme sind die am meisten verbreiteten. Die Vorteile dieses Materials liegen in der einfachen Verarbeitbarkeit. Dabei weist das Material ein hohes Elastizitätsmodul auf und ist zudem sehr beständig gegen chemische und thermische Einflüsse. Zum Einsatz kommen meist Epoxid-, ungesättigte Polyester- oder Vinylharze. Diese Harze härten durch Zugabe eines Härterers aus. [2, S. 84-85] Epoxidharze sind meist die teuersten Harze, jedoch sind die Kleb- und Haftungseigenschaften hervorragend. Auch sehr gute Ermüdungsfestigkeiten werden bei Epoxidharzen erreicht. [2, S. 126] Aus diesen Gründen wird bei Hochleistungs-Sportgeräten meist eine Matrix aus Epoxidharz eingesetzt. [2, S. 125] Aus den oben genannten Gründen soll auch die Matrix, des in dieser Arbeit zu berechnenden Laufrads, aus Epoxidharz dargestellt werden.

Matrixsysteme aus **Thermoplast** zeigen, aufgrund ihrer räumlich nicht vernetzten Makromoleküle, eine höhere Kriechneigung als Duroplaste. Dies ist insbesondere bei höheren Temperaturen der Fall. Im Gegensatz zu Duroplasten können Thermoplaste aufgeschmolzen und beispielsweise durch Schweißen miteinander verbunden werden. Auch die Recyclingfähigkeit erhöht sich durch die Schmelzbarkeit. [2, S. 85-86]

Neben Duroplastischen und Thermoplastischen Matrixsystemen gibt es Matrixsysteme aus **Elastomer**. Aufgrund der elastischen Eigenschaften eignet sich dieser Werkstoff nicht für auf Druck belastete Bauteile. Sie finden ihren Einsatz in auf Zug belasteten Bauteilen wie Keil- oder Zahnriemen sowie Förderbändern. [2, S. 86-87]

Da die Zahl der verfügbaren Matrixmaterialien für den Bauteilentwickler unüberschaubar groß ist, empfiehlt es sich bei der Gestaltung eines Bauteils den Rat der Kunststoffhersteller einzuholen. Diese können in der Regel auf einen großen Erfahrungsschatz zurückgreifen und das für den jeweiligen Anwendungsfall beste Material vorschlagen. [2, S. 133]

### 2.1.2 Fasern

Neben unterschiedlichen Werkstoffen für die Matrix steht auch eine große Vielfalt an Fasern zur Verfügung. Grundsätzlich besteht die Möglichkeit organische oder anorganische Fasern, Naturfasern oder Fasern aus Metall einzusetzen. Relevant für FVK sind allerdings nur anorganische Glasfasern und organische Fasern aus Kohlenstoff oder Aramid. [2, S. 26]

Das Besondere am Einsatz von Fasern ist, dass durch die Faserform deutlich bessere Festigkeiten und Steifigkeiten erreicht werden, als würde der Werkstoff in einer kompakten Form vorliegen. Einer der Gründe dafür ist, dass in einem kleineren Werkstoffvolumen die Anzahl der festigkeitsreduzierenden Fehlstellen deutlich absinkt. In Abbildung 2 kann man diese Besonderheit gut anhand einer Glasfaser erkennen. Deutlich erkennbar ist, dass die Festigkeit

---

besonders bei Durchmessern unter  $0,04\text{ mm}$  immer stärker ansteigt, je kleiner der Durchmesser wird. [2, S. 21-22]

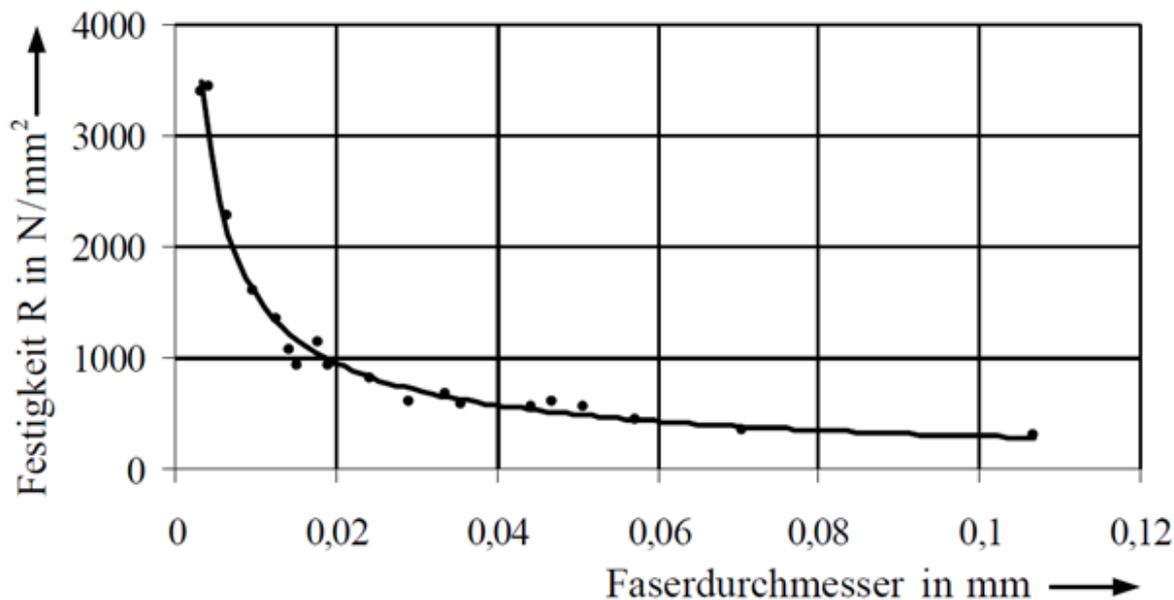


Abbildung 2 : Festigkeit in Abhängig zum Faserdurchmesser am Beispiel einer Glasfaser [2, S. 22]

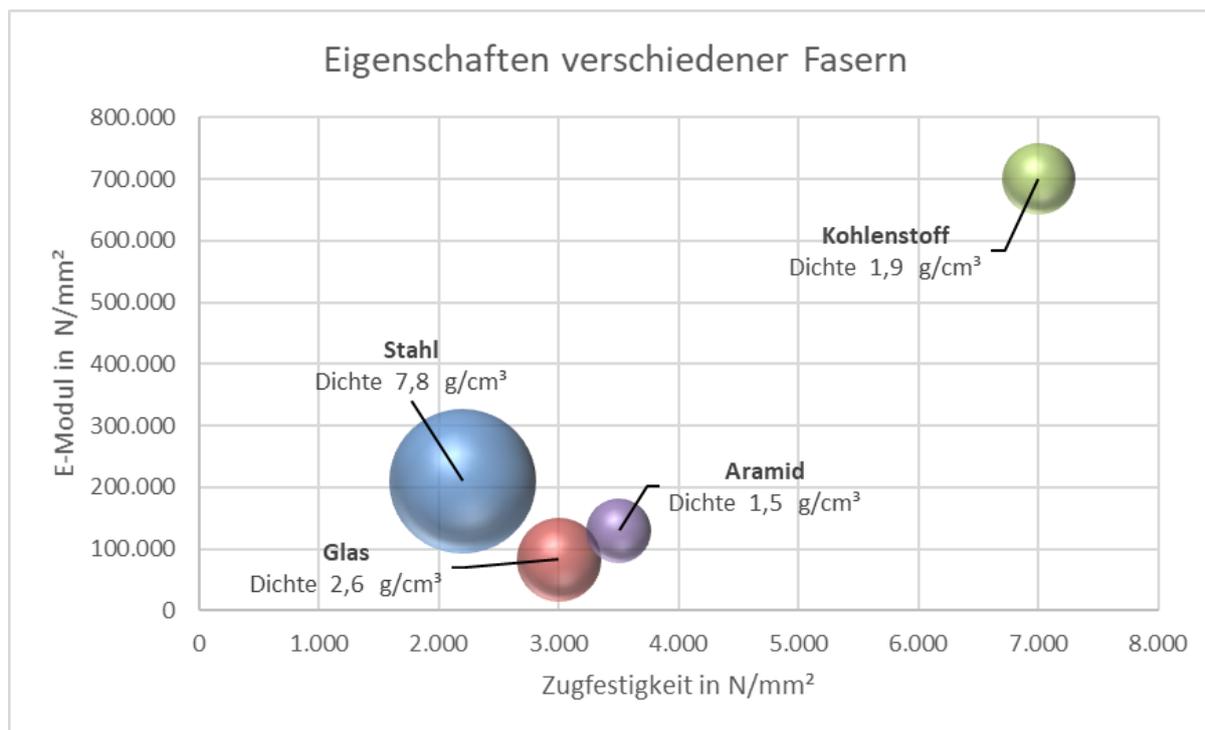
Die Vorteile von **Glasfasern** liegen unter anderem in den hohen Zug- und Druckfestigkeiten in Längsrichtung, einer geringen Feuchtigkeitsaufnahme und der guten Drapierbarkeit. Dass Glasfasern nicht brennbar sind und eine hohe Widerstandsfähigkeit gegen Umwelteinflüsse aufweisen, spricht ebenfalls für sie. Brüche sind aufgrund einer Verfärbung von transparent zu milchig gut erkennbar. Ein entscheidender Grund für den Einsatz von Glasfasern ist allerdings in erster Linie der niedrige Preis. Da die Glasfaser ein nur geringes E-Modul aufweist sind steife Strukturbauteile in der Regel nicht möglich. Die großen elastischen Verformbarkeiten aufgrund des niedrigen E-Moduls machen den Einsatz von Glasfasern somit aber besonders interessant für Federnde Bauteile. [2, S. 28-29] Die Glasfasern lassen sich in insgesamt 6 Glasarten unterteilen: E-Glas, R/S-Glas, M-Glas, C-Glas, D-Glas und Q-Glas. R/S-Fasern zeigen beispielsweise eine erhöhte Festigkeit, M-Fasern weisen dagegen ein hohes Modul im Vergleich zu den anderen Fasern aus Glas auf. [4, S. 57]

**Aramidfasern**, auch bekannt unter den Handelsnamen Kevlar®, Twaron® oder Technora®, sind die einzigen Polymerfasern die in der Breite Anwendung gefunden haben. Einer der großen Vorteile von Aramidfasern ist die geringere Dichte gegenüber Kohlenstoff- und Glas-Fasern. Besonders bedeutsam ist zudem die hohe Zähigkeit und die gute Dämpfungseigenschaft der Fasern. Aramidfasern werden aus diesem Grund gerne mit Kohlenstofffasern kombiniert um die Schlagzähigkeit des Laminats zu erhöhen. Den Vorteilen der Aramidfaser stehen allerdings einige zu beachtende Nachteile gegenüber. Diese Nachteile können den Einsatz solcher Fasern ausschließen. Zum einen weisen die Fasern eine ausgesprochen geringe Druckfestigkeit auf, zum anderen neigt die Faser zur Wasseraufnahme und ist nicht UV-Stabil. Ein

weiterer nicht zu vernachlässigender Nachteil ist die schlechte mechanische Bearbeitungsmöglichkeit. [2, S. 43-45]

**Kohlenstofffasern** weisen aufgrund der graphitähnlichen Struktur hervorragende Eigenschaften auf. [1, S. 151] Zu den positiven Eigenschaften zählen unter anderem die geringe Dichte der Fasern, die extrem hohe Festigkeit und das sehr hohe E-Modul. Auch bei dynamischer Belastung zeigen die Fasern eine herausragende Ermüdungsfestigkeit. Bedingt durch die hohe Steifigkeit der Kohlenstofffaser konzentrieren sich die eingeleiteten Kräfte in der Faser und entlasten dabei das schwächere Matrixmaterial sowie die Verklebung. Neben den Vorteilen haben Kohlenstofffasern auch Nachteile. Der größte Nachteil dieser Fasern besteht im hohen Preis. Dies ist auch in erster Linie der Grund warum viele Strukturbauteile weiterhin mit herkömmlichen Materialien wie Stahl und Aluminium hergestellt werden. Neben dem Preis gibt es noch einige zu erwähnende Technische Nachteile. Durch die Undurchsichtigkeit der Fasern lässt sich beim Laminieren die ausreichende Benetzung mit Harz nur schwer kontrollieren. Bei Schlagbeschädigungen ist ebenfalls keine Prüfung mit bloßem Auge möglich. Da die faserparallele Druckfestigkeit teilweise der limitierende Faktor bei Kohlenstofffasern ist muss teilweise ein Kompromiss zwischen Zugfestigkeiten und Druckfestigkeiten eingegangen werden. Bedingt durch die hohen Steifigkeiten der Fasern sind bei der Konstruktion größere Eckradien vorzuhalten. [2, S. 39-41]

Mit der Zeit haben sich unterschiedliche Kohlenstofffasern entwickelt. Die entscheidenden Unterschiede sind dabei die Faserfestigkeiten und Steifigkeiten in Faserrichtung. Wobei anzumerken ist, dass die Steifigkeiten und Faserfestigkeiten nicht gekoppelt steigen. Es wird unterschieden in HT-, ST-, IM-, HM-, UHM-Fasern. Die Steifigkeiten reichen von HT-Fasern mit  $230.000 \text{ N/mm}^2$  bis UHM-Fasern von bis zu  $700.000 \text{ N/mm}^2$ . Die Zugfestigkeitskennwerte liegen bei HT-Fasern etwa bei  $3.430 \text{ N/mm}^2$  und bei UHM-Fasern bei  $2150 \text{ N/mm}^2$ . ST-Fasern welche nur leicht höhere Steifigkeiten als HT-Fasern aufweisen, liefern Festigkeitswerte von etwa  $4.510 \text{ N/mm}^2$ . [2, S. 41] [3, S. 143]



**Diagramm 1** Gegenüberstellung ausgewählter Eigenschaften von Glas-, Kohle-, Aramid- und Stahlfasern (Maximalwerte)[Eigene Darstellung] [3, S. 143]

In Diagramm 1 werden die wichtigsten Eigenschaften der drei zuvor beschriebenen Fasermaterialien dargestellt: Glas, Aramid und Kohlenstoff. Zum Vergleich und zur besseren Einordnung wurde noch Stahl mit aufgenommen. Zu beachten ist dabei, dass jeweils die Maximalwerte der unterschiedlichen Materialien aufgetragen sind. Gerade bei Kohlenstofffasern können die Werte für das E-Modul und Zugfestigkeit stark variieren. Sie reichen beim E-Modul von  $230.000 \text{ N/mm}^2$  bis  $700.000 \text{ N/mm}^2$  und bei der Zugfestigkeit von  $2.400 \text{ N/mm}^2$  bis  $7.000 \text{ N/mm}^2$ . Im Diagramm ist zu erkennen, dass Kohlenstoff die höchsten Werte für E-Modul und Zugfestigkeit, bei gleichzeitig geringer Dichte, erreichen kann [3, S. 143]. Allerdings zeigen die Eigenschaften von unterschiedlichen Kohlenstofffasern bei der Zugfestigkeit und dem E-Modul eine gewisse Abhängigkeit zueinander. Bei hohen E-Modulen stellen sich geringere Zugfestigkeiten ein. Bei hohen Zugfestigkeiten sind geringe E-Module zu erreichen. [2, S. 41]

Da Kohlenstofffasern die besten Eigenschaften zeigen, soll das in dieser Arbeit zu behandelnde Laufrad aus diesen Fasern bestehen. Die höheren Kosten gegenüber den anderen Fasern sollen zunächst vernachlässigt werden.

### 2.1.3 Fertigungsverfahren

Für die Erstellung von FVK-Bauteilen aus Langfasern werden unterschiedliche Fertigungsverfahren eingesetzt. Die Auswahl des richtigen Verfahrens hängt in erster Linie von der zu produzierenden Stückzahl sowie der Geometrie des Bauteils ab. Die Geometrie des Bauteils

sollte demnach auch bereits im Vorfeld auf das einzusetzende Fertigungsverfahren abgestimmt sein. Grundsätzlich sollten Gestaltungsregeln wie bei Kunststoffen beachtet werden. Dazu zählt beispielsweise, dass geringe Wandstärken anzustreben sind, Hinterschneidungen und Masseanhäufungen zu vermeiden sind und Entformungsschrägen vorgehalten werden müssen. Dazu kommen Regeln für das fasergerechte Gestalten, wozu in erster Linie die Ausrichtung der Fasern in Belastungsrichtung zählt. [3, S. 18-20]

Folgende Fertigungsverfahren werden aktuell zur Herstellung von FVK-Bauteilen genutzt [3, S. 41-47]:

- **Handlaminieren**
  - Ältestes, einfaches und am weitesten verbreitete Verfahren
  - Besonders gut für geringe Stückzahlen geeignet
- **Vakuumpressen**
  - Zuvor handlaminiertes Bauteil wird unter Vakuum ausgehärtet
- **Autoklav-Verfahren**
  - Eines der teuersten und aufwändigsten Verfahren
  - Bauteil härtet unter einem Druck von bis zu ca. 6 bar aus
  - Höchste Festigkeit der Bauteile
- **Injektionsverfahren**
  - Aushärtung ohne Druck
  - Flüssiges Harz wird in eine Form gespritzt
- **Wickeln**
  - Fasern werden auf einen Kern aufgewickelt
  - Besonders gut geeignet für rotationssymmetrische Bauteile
  - Gut automatisierbar
- **Pressverfahren**
  - Geeignet für große Stückzahlen
  - Unterscheidung in Heiß- und Kaltpresstechnik sowie Naß- und Prepreg-Pressverfahren

Zur Fertigung von FVK-Bauteilen werden in der Regel fertige Halbzeuge bezogen. Die Halbzeuge können je nach weiterem Fertigungsverfahren unterschiedlich gestaltet sein. Sie können als reine Fasern vorliegen, zum Beispiel als Gewebe, Gelege oder Vlies. Sie können jedoch auch als sogenannte Prepregs bezogen werden. Ein Prepreg ist ein bereits mit Harz vorimpregniertes Gewebe. Da Prepregs bereits reaktiv sind, können diese nicht beliebig gelagert werden, sondern müssen teilweise tiefgekühlt gelagert werden. Selbst bei korrekter Lagerung beträgt die Lagerfähigkeit lediglich 12 Monate. [2, S. 147, 3, S. 44]

---

Auf die Herstellung der Fasern und Kunststoffe an sich soll an dieser Stelle bewusst verzichtet werden. Für weitere Informationen kann an dieser Stelle beispielsweise auf Schürmann [2] oder Flemming, Ziegmann und Roth [4] verwiesen werden.

Neben Halbzeugen, die zur endgültigen Form weiterverarbeitet werden müssen, gibt es auf dem Markt auch bereits fertige Profil-Halbzeuge. Diese können teilweise direkt in einer Baugruppe montiert werden. In Abbildung 3 ist eine kleine Auswahl von Profil-Halbzeugen zu sehen, die von der Firma „R&G“ über ihre Internetseite zum Kauf angeboten werden. Der Vorteil von solchen Halbzeugen liegt in der gleichbleibend hohen Qualität, einem günstigem Preis und der schnellen Verfügbarkeit.[5]



Abbildung 3 Profil-Halbzeuge von R&G aus Faserverbundkunststoff [5]

Fertige Profilhalbzeuge, sowie ausgehärtete Bauteile die frisch aus der Form kommen, müssen meist nachgearbeitet werden. Zur Nacharbeit sind die üblichen spanenden Verfahren wie Sägen, Schleifen, Bohren, Fräsen und Drehen geeignet. Wichtig dabei ist darauf zu achten, dass Werkzeuge aus Hartmetall oder Diamant eingesetzt werden. Im Großserieneinsatz können auch Wasserstrahl- und Laserstrahlschneidanlagen eingesetzt werden. [3, S. 49-51]

Werden reine Fasern bezogen gibt es die bereits beschriebenen Varianten: Vliese, Gelege und Gewebe. Beim Handlaminieren werden in der Regel reine Fasern bezogen und mit dem entsprechenden Matrixharz laminiert. Aufgrund des hohen Harzgehaltes bei Vliesen sind diese in der Regel irrelevant bei stark belasteten Bauteilen. Gelege bestehen aus parallelen UD-Fasern, die mit Garnen in Form gehalten werden. Gewebe kann man sich als miteinander verwebte UD-Faserbündel vorstellen. Ein Unterscheidungsmerkmal bei Geweben ist die Webart beziehungsweise auch Bindung genannt. Die wichtigsten Bindungsarten sind Leinwand, Köper und Atlas. [2, S. 57-63]

In Abbildung 4 sind die verschiedenen Bindungsarten dargestellt. Ein wichtiges Merkmal zur Verarbeitung der unterschiedlichen Bindungsarten ist die Schiebefestigkeit des Gewebes. Aufgrund der hohen Anzahl an Kreuzungen ist die Schiebefestigkeit bei Leinwandgeweben größer als bei Körper- und Atlasbindungen. Die beste Handhabung und Drapierfähigkeit bietet Gewebe mit Atlasbindung, gefolgt von Gewebe mit Körperbindung. [3, S. 150-151]

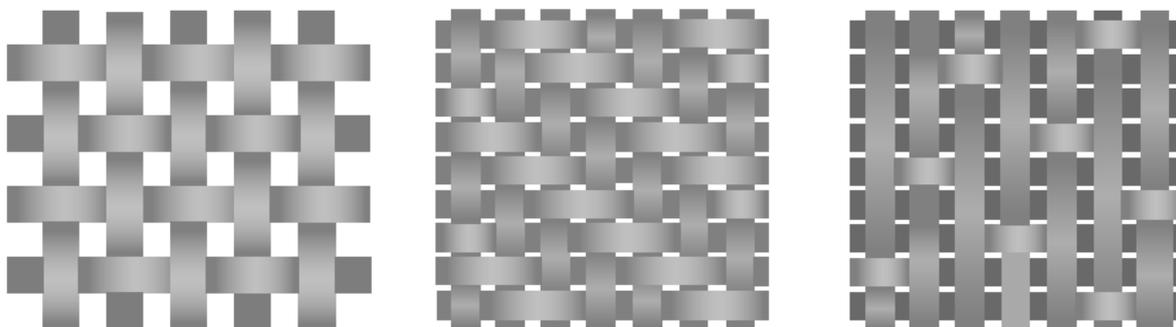


Abbildung 4 : Leinwandbindung (Links), Körperbindung (Mitte) und Atlasbindung (Rechts) [3, S. 150-151]

#### 2.1.4 Einsatzgebiete

Faserverbundkunststoffe finden heutzutage Anwendung in den unterschiedlichsten Einsatzbereichen. Ein typischer Einsatzbereich ist die Luft- und Raumfahrt. Das geringe Gewicht, die ausgezeichneten statischen und dynamischen Festigkeiten sowie die Korrosionsbeständigkeit sind die entscheidenden Eigenschaften für den Einsatz. Komplette Rümpfe und Tragflächen werden bei kleinen Flugzeugen wie zum Beispiel Segelflugzeugen aus FVK hergestellt. Aber auch bei Flugzeugen für die zivile Luftfahrt werden Teile aus FVK eingesetzt. [3, S. 17]

Neben der Luft- und Raumfahrt werden Bauteile aus FVK auch im Fahrzeugbau, der Energietechnik, dem Maschinen- und Anlagenbau und in der Medizintechnik eingesetzt. Beim Einsatz im Fahrzeugbau wird ein niedriges Gewicht angestrebt, um Kraftstoff einsparen zu können. Im Maschinen- und Anlagenbau werden aufgrund der geringen Massenträgheit, hoch beschleunigte Teile aus FVK eingesetzt. Die Medizintechnik profitiert insbesondere von der guten Körperverträglichkeit. [3, S. 17]

Ein weiteres großes Einsatzgebiet ist der Sport- und Freizeitbereich. Hier stehen im Besonderen das geringe Gewicht und die kostengünstige Fertigung im Vordergrund. Einsatz finden FVK hier unter anderem im Modellbau, beim Bau von Booten und Surfbrettern, bei Skiern, Angelruten sowie Schlägern aller Art. Auch im Radsport werden seit einigen Jahren immer mehr Komponenten aus FVK angeboten. Das größte Teil am Fahrrad, der Rahmen, wird aufgrund des hohen Gewichteinsparpotentials besonders gerne aus FVK gefertigt. Grundsätzlich werden dabei drei Bauarten unterschieden: die Muffen-, die Tube-to-Tube-, oder die Monocoque-Bauweise (siehe Abbildung 5). [6, S. 180-184]



**Abbildung 5** Fahrradrahmen in Muffenbauweise (links), Tube-to-Tube-Bauweise (mitte) und Mono-coque-Bauweise (rechts) [6, S. 180-181]

Bei der Muffen-Bauweise werden an den Verbindungsstellen Muffen eingesetzt. Bei der Tube-to-Tube-Bauweise werden die zu verbindenden Rohre auf Gehrung gefräst und in den Verbindungsstellen mit zusätzlichem Gewebe verklebt. Dieses Verfahren wird von einigen Herstellern bevorzugt, wenn der Fokus auf hohe Qualität und extrem geringes Gewicht gelegt wird. Der überwiegende Teil an FVK Rahmen wird in Taiwan und China mit der Monocoque-Bauweise hergestellt. Hier wird der Rahmen aus zwei oder mehr Einzelsegmenten zusammengesetzt und verklebt. Für jede Rahmengröße werden dazu einzelne Formen benötigt. Meist wird eine rein dekorative Deckschicht aufgebracht, welche den Bauteilen die typische Carbon-Optik verleiht. [6, S. 180-184]

## 2.2 Das Laufrad eines Fahrrads

Fahrräder gibt es heutzutage in einer Vielzahl von Ausführungen. Der Einsatzzweck des Rades wird meist als Unterscheidungs- und Benennungsmerkmal ausgewählt. Zu den gewöhnlichen Typen zählen City- und Trekkingräder, Jugendfahrräder, Geländefahrräder und Rennräder. Eher exotische Varianten sind zum Beispiel Lastenfahrräder, Liegeräder, Tandems und BMX-Fahrräder. Neben dem klassischen Antrieb durch reine Muskelkraft, gibt es inzwischen zunehmend Fahrräder mit elektrischer Antriebsunterstützung. [6, S. 101-126, 7, S. 5]



Abbildung 6 : Einzelteile eines Zugspeichen-Laufrads mit Reifen [8]

Die Einheit aus Nabe, Speichen und Felge wird nach DIN EN ISO 4210-1 als Laufrad bezeichnet (siehe Abbildung 6). Die Felge hält den eigentlichen Reifen in seiner Position. Die Speichen befestigen die Felge wiederum an der Nabe. Um in jedem Betriebszustand ein stabiles Laufrad zu gewährleisten, müssen bei Zugspeichenlaufrädern die Speichen vorgespannt werden. Die Vorspannung muss dabei so groß sein, dass trotz zusätzlicher Betriebslast immer noch eine Vorspannung gewährleistet wird. [6, S. 159-161, 7, S. 9]

### 2.2.1 Zugspeichenrad, Scheibenrad, Druckspeichenrad

Zugspeichenräder sind die verbreitetste Variante von Laufrädern. Namensgebend sind die in der Regel 2,0 mm dünnen, nur auf Zug zu beanspruchenden Speichen [6, S. 288]. Ein solches Rad besitzt in der Regel eine Vielzahl von einzelnen Speichen. Neben dieser Variante gibt es

noch zwei weitere Arten die Nabe mit der Felge zu verbinden: zum einen das Scheibenrad und zum anderen das Druckspeichenrad. [6, S. 259]

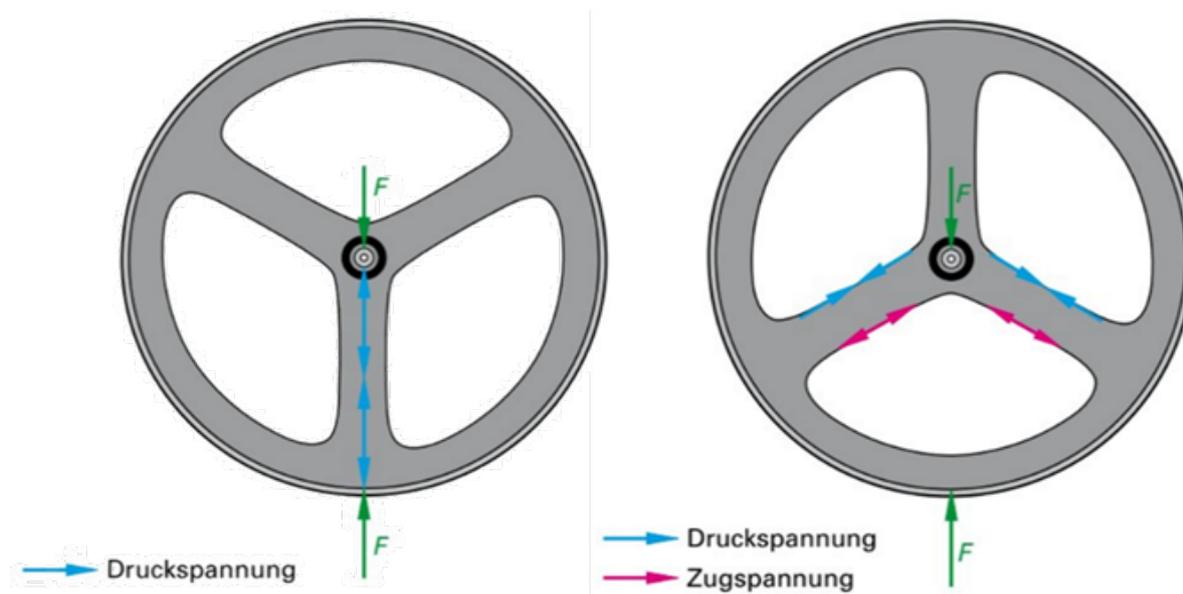


Abbildung 7 Spannungen im Druckspeichenrad [6, S. 260]

Das Scheibenrad ist die ursprünglichste Form eines Rades. Bei dieser Form wird die Nabe mit einer umlaufenden Scheibe mit der Felge verbunden. Anwendung findet diese Art von Laufrad heutzutage in der Regel nur bei Fahrrädern die speziell für Zeitfahrten ausgelegt sind. Leichtbauwerkstoffe wie CFK ermöglichten erst einen sinnvollen Einsatz. Günstige Windverhältnisse können dem Fahrer aufgrund der großen Fläche des Laufrads zusätzlichen Vorschub geben. Dies kann trotz des höheren Gewichts des Laufrades einen Vorteil ergeben. Zudem entstehen nur geringe Luftverwirbelungen aufgrund der nicht vorhandenen vielen einzelnen Speichen. [6, S. 259, 9]

Neben den beiden bereits genannten Varianten gibt es noch das Druckspeichenrad. Felge, Speichen sowie Nabe sind in der Regel ein gemeinsames Teil. Die Speichen sind ohne außen anliegende Kraft unbelastet. Erst nachdem eine äußere Kraft in das Rad eingeleitet wird entstehen Spannungen im Bauteil. Diese Spannungen unterscheiden sich je nach Lage der Speichen zur Kräfteinleitung. Bei den Speichen von Druckspeichenrädern handelt es sich um Geometrien, welche neben Normalkräften auch Querkräfte, Biegemomente und Torsionsmomente aufnehmen können. Dies hat zur Folge, dass innerhalb einer Speiche Zug- und Druckspannungen vorliegen können (siehe Abbildung 7). Diese Art von Laufrädern wird neben BMX-Fahrrädern, bei denen die günstige Herstellung von kleinen Laufrädern aus Polyamid im Vordergrund steht, insbesondere für Zeitfahräder und Bahnäder aus CFK eingesetzt. Der Vorteil dieser Laufräder wird in der guten Optimierungsmöglichkeiten bezüglich Aerodynamik gesehen. Beim Zeitfahren spielt das höhere Gewicht eines solchen Laufrads eine

untergeordnete Rolle. Ein weiterer Vorteil der Druckspeichenräder liegt in der geringeren Seitenwindanfälligkeit im Vergleich zu Scheibenrädern. [6, S. 260]

## 2.2.2 Druckspeichenlaufrad für Mountainbikes aus CFK

Wie bereits in 2.2.1 beschrieben werden Druckspeichenräder aus FVK in erster Linie bei Zeitfahrrädern eingesetzt. Auf dem Markt werden jedoch auch Druckspeichenräder aus FVK für Mountainbikes angeboten. Beispielsweise bietet die Firma „all ahead composites GmbH“ (im folgenden „all ahead“) aus Deutschland und die Firma „XeNTiS Composite Entwicklungs- und Produktions GmbH“ (im folgenden „XeNTiS“) aus Österreich unterschiedliche Varianten an CFK-Laufrädern für Mountainbikes an. Die von den beiden Firmen angebotenen Laufräder unterscheiden sich in erster Linie durch ihr Design. Die Firma „all ahead“ bietet lediglich Laufräder mit 6 Speichen an, wohingegen die Firma „XeNTiS“ Laufräder mit 5 oder 4 Speichen anbietet. [10, 11]

Tabelle 1 Gegenüberstellung verschiedener Laufräder aus CFK von den beiden Herstellern „all ahead“ und „XeNTiS“. Für Design und Felgengeometrie siehe Tabelle 2 und Tabelle 3 [10, 11]

Hersteller	Benennung	Größe	Speichen	Gewicht Laufradsatz	Zulässiges Gewicht	Preis Laufradsatz	Design	Felgengen- Geometrie
all ahead	BITURBO RS	27,5 "	6	120 9 g	95 kg	3.399, 00 €	1	a
		29"		124 9 g				
	BITURBO E	27,5 "	6	136 9 g	115 kg	3.399, 00 €	1	a
29"		151 9 g						
	BITURBO XE	27,5 "	6	169 9 g	130 kg	3.399, 00 €	1	a
XeNTiS	KAPPA X 27.5	27,5 "	5	159 7 g	140 kg	2.799, 00 €	2	b
	KAPPA X 27.5 BOOST	27,5 "	5	162 5 g	140 kg	2.899, 00 €	2	b
	KAPPA X 29	29"	5	170 2 g	140 kg	2.999, 00 €	2	b
	KAPPA X 29 BOOST	29"	5	173 0 g	140 kg	3.099, 00 €	2	b
	KAPPA2 26	26"	4	127 6 g	120 kg	2.399, 00 €	3	c
	KAPPA2 27.5	27,5 "	4	138 4 g	120 kg	2.499, 00 €	3	d
	KAPPA2 27.5 BOOST	27,5 "	4	141 3 g	120 kg	2.599, 00 €	3	d

Die in Tabelle 1 aufgelisteten Laufräder sind alle für Mountainbikes geeignet. Die Laufräder sind so vorbereitet, dass sie mit schlauchlosen Reifen gefahren werden können. Der Preis für Carbon-Laufräder ist nicht unerheblich. Je nach Art und Größe eines Laufradsatzes kann dieser zwischen 2.600 Euro und 3.400 Euro betragen. Das zulässige Gesamtgewicht von Fahrer und Gepäck wird abhängig vom jeweiligen Laufrad mit 95 kg bis 140 kg angegeben. Alle aufgelisteten Laufräder sind ausschließlich für Scheibenbremsen über die Nabe geeignet. [10, 11]

Tabelle 2 Vergleich des Designs der Laufräder von den beiden Herstellern „all ahead“ und „XeNTiS“ [10, 12]

<b>Laufraddesign</b>		
1	2	3
		
„all ahead“	„XeNTiS“	

Tabelle 2 zeigt die unterschiedlichen Designs der Laufräder. Bei Design 1 verjüngen sich die vierkantigen Speichen von Nabe zur Felge hin. Zur Nabe laufen sie tangential zu. Somit sind die gegenüberliegenden Speichen immer leicht versetzt angeordnet. Die äußerste Schicht der Laufräder wird als UD-Schicht dargestellt. Bei Design 2 ist der Bogen in den Speichen auffällig. Dieser dient laut Hersteller zur besseren Federung des Laufrads. Das Profil der Speichen ist grundsätzlich vierkantig. Allerdings ändert es über die Länge hin den Querschnitt und ist in vielen Bereichen stark verrundet. Design 3 zeigt ein Laufrad mit 4 Speichen. Die Speichen sind direkt gegenüber angeordnet, was das Laufrad symmetrisch macht. Der Speichenquerschnitt lässt sich aus einem Übergang zwischen ellipsenförmig und vierkantig beschreiben. Wobei sich auch hier der Speichenquerschnitt stark über die Länge ändert. Die äußerste Laminatschicht besteht bei Variante 2 und 3 aus einem Gewebe. Alle 3 Varianten werden laut Herstellerangaben mit Hilfe von Prepregs und einem Autoklav in Monocoque-Bauweise hergestellt. [10, 11]

Tabelle 3 Vergleich der Felgengeometrien der Laufräder von den beiden Herstellern „all ahead“ und „XeNTiS“ [10, 12]

<b>Felgengeometrie</b>			
a	b	c	d
			
„all ahead“	„XeNTiS“		

Tabelle 3 zeigt die unterschiedlichen Felgengeometrien zu den Laufrädern. Alle gezeigten Laufräder sind für schlauchlose Reifen vorbereitet. Über die Ausrichtung der Fasern, eingesetztem Material für Faser und Matrix sowie möglichen Verstärkung durch Einsatz von anderem Material werden von den Herstellern keine Angaben gemacht. [10, 11]

Im Gegensatz zu Laufrädern aus Aluminium sind Laufräder aus CFK bei Beschädigungen in der Regel irreparabel. Zur Festigkeitsberechnung und Auslegung der Laufräder werden vom Hersteller keine genauen Angaben gemacht. [11]

### 2.2.3 Belastungen am Laufrad

Grundsätzlich greifen am Laufrad eines jeden Fahrrads drei unterschiedliche Kräfte an (siehe Abbildung 8). Es wird zwischen Radialen, Tordierenden und Lateralen Kräften unterschieden. Dünne Speichen von Zugspeichenrädern können nur Kräfte in Längsrichtung aufnehmen. Daher muss die Anordnung der Speichen so gestaltet werden, dass auftretende Belastungen ausschließlich in Normalkräfte der Speichen umgewandelt werden können. [6, S. 261]

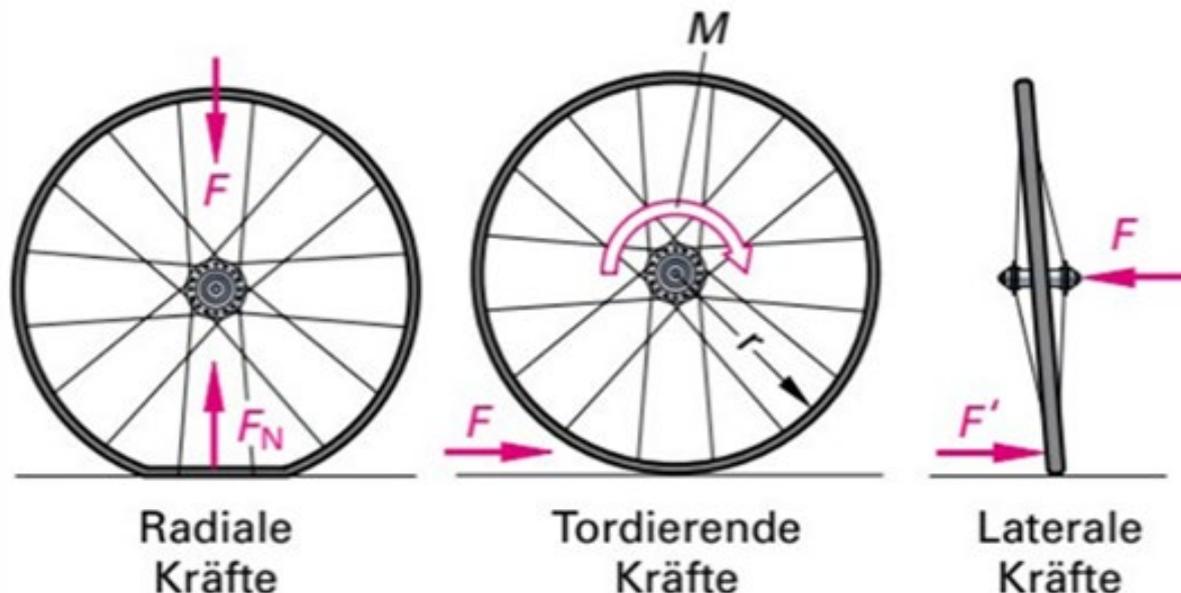


Abbildung 8 Äußere Kräfte am Laufrad [6, S. 261]

**Radiale Kräfte** (siehe Abbildung 8 links) entstehen durch die Gewichtskraft des Fahrrads, des Fahrers und möglichem Gepäck. Sie haben zur Folge, dass bei Zugspeichenrädern die Speichen unterhalb der Nabe entlastet werden, für die restlichen Speichen steigt die Belastung infolgedessen an. Zwingend erforderlich ist hierbei die ausreichende Vorspannung der Speichen. [6, S. 261-262]

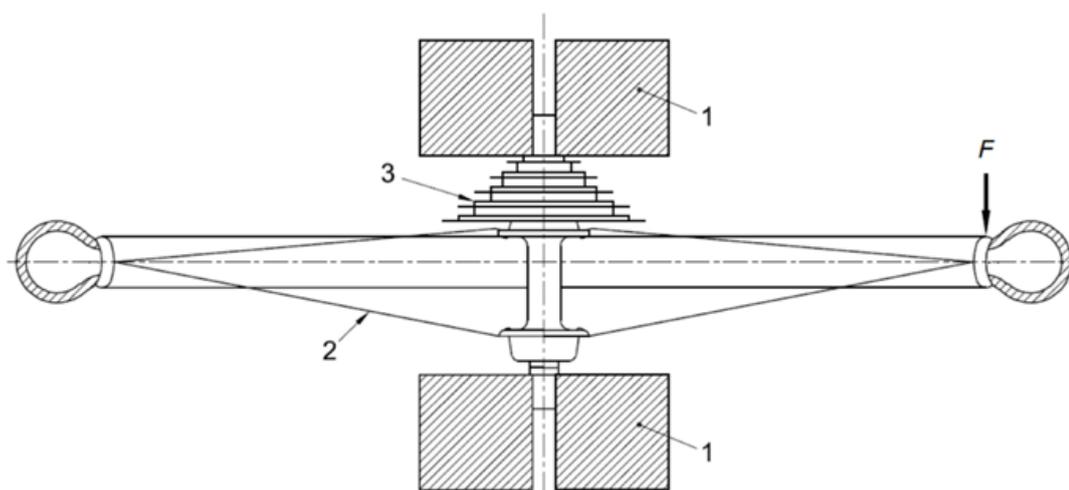
**Tordierende Kräfte** (siehe Abbildung 8 mittig) treten in erster Linie am angetriebenen Hinterrad auf. Aufgrund des Antriebsmoments, welches über die Nabe übertragen wird, und der Reibung zwischen Rad und Untergrund, tordiert die Nabe relativ zur Felge. Durch eine Nabenbremse können ebenfalls tordierende Kräfte in die Nabe eingeleitet werden. Um Torsionskräfte aufnehmen zu können werden bei Zugspeichenrädern die Speichen tangential mit der Nabe verbunden. Somit können die Torsionskräfte in Druck- und Zugspannungen umgewandelt und durch die Speichen aufgenommen werden. [6, S. 263]

**Laterale Kräfte** (siehe Abbildung 8 rechts) treten in der Regel nur auf, wenn das Fahrrad aus der vertikalen Achse gekippt wird und dabei die Richtung der Gewichtskraft beibehält. Dies ist beispielsweise im Wiegetritt der Fall. Um diese Kräfte von der Felge auf die Nabe übertragen zu können, werden bei Zugspeichenrädern die Speichen nicht in einer Ebene an der Nabe befestigt. Vielmehr werden sie an den beiden Enden der Nabe angebracht. Dies ist in Abbildung 8 bei der Darstellung der lateralen Kräfte zu erkennen. [6, S. 264-265]

## 2.2.4 Prüfungen für Laufräder und Felgen

Um Fahrräder und deren Laufräder international einheitlich zu prüfen wurde die DIN EN ISO 4210 entwickelt. Die Norm gibt Informationen für Sicherheitstechnische Anforderungen an Fahrräder. [13]

Um die Festigkeit des Laufrads gegen statisch laterale Kräfte abzu prüfen, kann das Laufrad wie in Abbildung 9 dargestellt, eingespannt werden. Nach aufbringen einer Vorlast von 5 N für eine Minute wird eine statische Kraft von 250 N aufgebracht. Danach wird die Kraft wieder auf die Last von 5 N verringert und nochmals für eine Minute gehalten. Daraufhin werden die Lauftoleranzen mit einer entsprechenden Vorrichtung gemessen. Die statische Prüfkraft von 250 N wird für City-, Trekking-, Jugend- und Rennräder genutzt. Für Geländefahrräder ist eine Kraft von 370 N aufzubringen. [13, S. 7-8]



### Legende

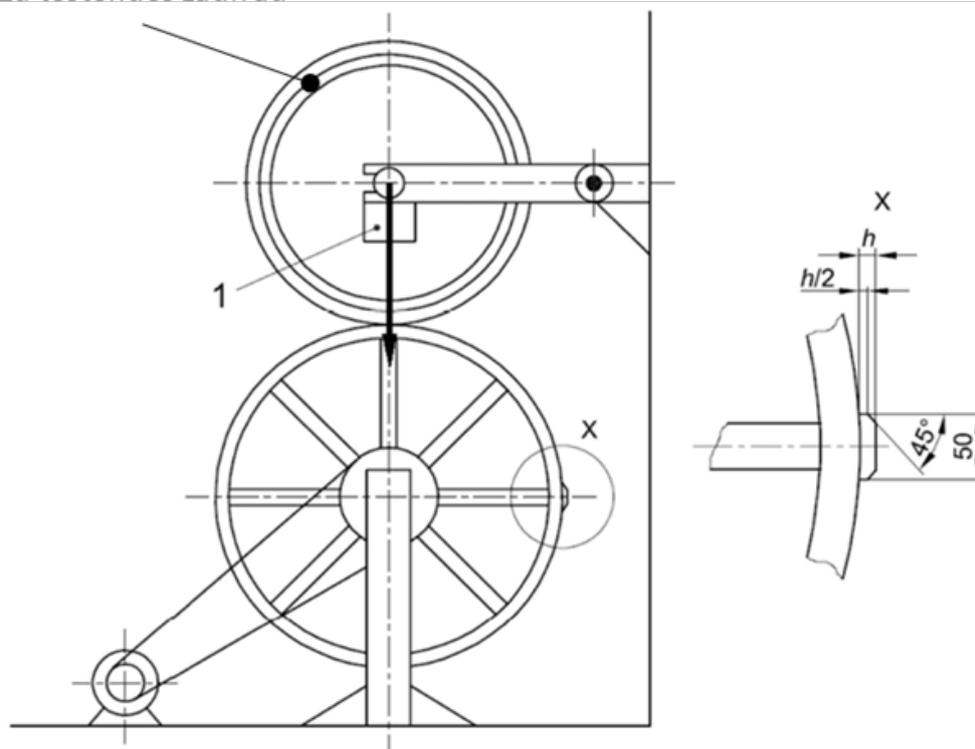
- 1 Einspannvorrichtung
- 2 Laufrad/Reifen-Einheit
- 3 Antriebsritzel

Abbildung 9 : Statische Festigkeitsprüfung des Laufrads [13, S. 8]

Eine dynamische Prüfung für City- und Trekkingfahrräder sieht vor, ein Laufrad so einzuspannen, dass es sich mit 20 km/h Umfangsgeschwindigkeit dreht (siehe Abbildung 10). Angetrieben wird das Laufrad durch ein zweites Rad welches tangential am Laufrad angeordnet ist. Das Laufrad wird dabei mit 640 N an das antreibende Rad gedrückt. Am antreibenden Rad ist eine definierte Querleiste angebracht. Durch diese Querleiste werden Stöße auf das Laufrad aufgebracht. Nach 750 000 Stößen ist der dynamische Test abgeschlossen. Der Test ist

bestanden, wenn in keinem Teil des Laufrades Brüche, Ablösungen oder sichtbare Risse aufgetreten sind. [13, S. 10-11]

Zu testendes Laufrad



#### Legende

- 1 die auf die Achse wirkende Gesamtkraft von 640 N
- $h$  Höhe der Querleisten

Abbildung 10 Aufbau dynamische Prüfung von City- und Trekkingfahrrädern [13, S. 11]

Um klimatische Auswirkungen auf Laufräder aus Verbundwerkstoffen zu prüfen, können die Laufräder in eine auf 80°C temperierte Klimakammer gelegt werden. Nach vier Stunden wird das Rad aus der Klimakammer entnommen, daraufhin muss es für weitere vier Stunden bei Raumtemperatur auskühlen. Vor der Klimatisierung und danach werden die Felgenbreiten gemessen. [13, S. 8-9]

Diese vorgestellte Auswahl an Prüfmöglichkeiten soll lediglich die wichtigsten darstellen. Für weiterführende Informationen kann die DIN EN ISO 4210 herangezogen werden.

### 3 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen aus der Technischen Mechanik und der klassischen Laminattheorie erläutert, die für die Berechnung von FVK mit Hilfe virtueller Kräfte notwendig sind. Einleitend wird dazu auf Schnittgrößen und die statische Bestimmtheit eingegangen, bevor das Prinzip der virtuellen Kräfte vorgestellt wird.

Um FVK mit Hilfe der virtuellen Kräfte berechnen zu können, werden Werkstoffkennwerte des Laminats benötigt. Wie sich diese zusammensetzen und wie man aus den inneren Beanspruchungen eines Bauteils die Dehnungen und Spannungen in jeder Laminatschicht ermittelt, wird in Abschnitt 3.4 beschrieben. Was die Besonderheiten bei FVK bezüglich der Festigkeitsanalyse und die Optimierungsmöglichkeiten sind, werden ebenfalls in Abschnitt 3.4 erläutert.

### 3.1 Schnittgrößen

Um Bauteile korrekt auslegen zu können, müssen die im Bauteilinneren vorliegenden Beanspruchungen bekannt sein. Diese inneren Beanspruchungen werden dann in der Regel mit maximal ertragbaren Beanspruchungen des Werkstoffs verglichen. Durch den Vergleich kann eine Aussage über die Bauteilfestigkeit gemacht werden. Aus diesem Grund muss herausgefunden werden, welchen Effekt äußere Kräfte auf die inneren Beanspruchungen eines Bauteils haben. [14, S. 75]

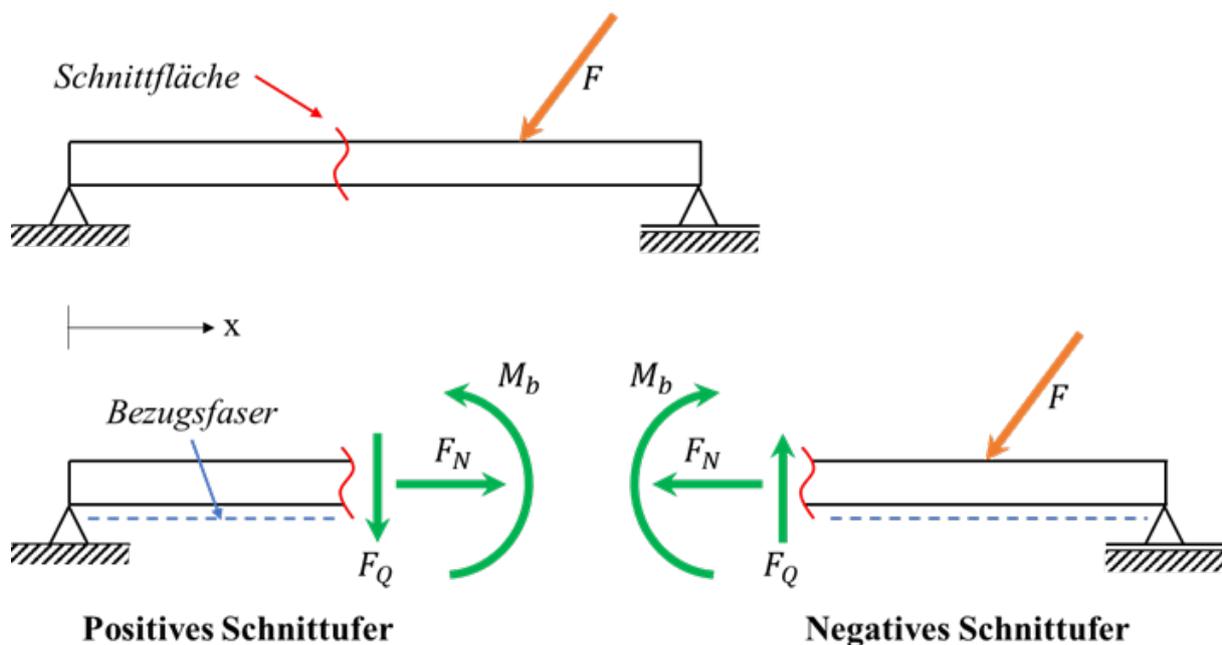


Abbildung 11 Vorzeichendefinition der unterschiedlichen Schnittufer mit Bezugsfaser. [Eigene Darstellung gemäß [15, S. 93] und [15, S. 97]]

Ein mit einer äußeren Kraft  $F$  belasteter Balken, so wie in Abbildung 11 dargestellt, kann im Inneren eine Normalkraft  $F_N$ , eine Querkraft  $F_Q$  und ein Biegemoment  $M_b$  erzeugen. Die Größe der Normal- und Querkraft sowie des Biegemoments ist abhängig davon, welcher Bereich des Balkens betrachtet wird und welche äußeren Kräfte anliegen. Um einen bestimmten Punkt im Balken betrachten zu können, wird dieser gedanklich an dieser Stelle aufgeschnitten. Wird jeder einzelne Punkt des Balkens geschnitten und die inneren Belastungen in einem Diagramm dargestellt, so spricht man vom Querkraft-, Normalkraft- beziehungsweise

Momentenverlauf. Aufgrund des Bauteilschnitts werden die inneren Kräfte und Momente auch Schnittkräfte beziehungsweise Schnittmomente genannt. [14, S. 79]

Die Schnittgrößen sind wie in Abbildung 11 dargestellt definiert. Eine positive Normalkraft  $F_N$  steht immer senkrecht auf der Schnittebene und „zieht“ am Balken. Die Querkraft  $F_Q$  liegt in der Schnittebene, zeigt am positiven Schnittufer „nach unten“ und am negativen Schnittufer „nach oben“. Das Biegemoment ist so definiert, dass wenn die untere Faser des Trägers auf Zug beansprucht wird, das Biegemoment positiv ist. Da bei zusammengesetzten Konstruktionen der Begriff „unten“ und „oben“ zu Problemen führen kann, wird eine zusätzliche Bezugsfaser eingezeichnet. Diese Bezugsfaser ersetzt die Definition „unten“ und „oben“. [15, S. 93-94]

### 3.2 Statische Bestimmtheit

In der statischen Festigkeitslehre können grundsätzlich zwei Systeme unterschieden werden: zum einen statisch bestimmte und zum anderen statisch unbestimmte Systeme. Bei statisch bestimmten Systemen sind die Reaktionskräfte durch die drei Gleichgewichtsbedingungen: Summe aller Kräfte in X-Richtung, Summe aller Kräfte in Y-Richtung sowie Summe aller Momente gleich Null, berechenbar. Statisch unbestimmte Systeme haben die Eigenschaft, dass es mehr Unbekannte als mögliche Gleichgewichtsbedingungen gibt. Somit sind diese allein mit den drei Gleichgewichtsbedingungen nicht lösbar. Um solche Systeme lösen zu können, müssen die Verformungen mitberücksichtigt werden. [14, S. 44]

Zudem wird die innerliche und äußerliche statische Bestimmtheit unterschieden. Die innerliche statische Bestimmtheit bezieht sich auf einen verbundenen Starrkörper. Bei der äußerlichen statischen Bestimmtheit werden die Freiheitsgrade eines Starrkörpers zu angrenzenden Komponenten betrachtet. Um den Rang der statischen Unbestimmtheit zu ermitteln, werden in einem Starrkörper so viele Schnitte oder Gelenke eingeführt, bis der Starrkörper eine statische Bestimmtheit erreicht. Der Rang der statischen Unbestimmtheit wird aus der Summe der Wertigkeiten von Schnitten und Gelenken ermittelt. Dabei haben Schnitte die Wertigkeit 3 (Kraft in X- und Y-Richtung sowie Moment) und Gelenke die Wertigkeit 1 (Moment). [16, S. 130-132]

In Abbildung 12 a) wird zur Veranschaulichung ein äußerlich und innerlich statisch unbestimmter Rahmen dargestellt. Durch die Formel  $f = 3 - a_{ges}$  lässt sich die statische Bestimmtheit von Tragwerken berechnen. Dabei stellt  $f$  die statische Bestimmtheit dar und  $a_{ges}$  ist die Summe aller Lagerreaktionen. Statische Bestimmtheit liegt vor, wenn  $f = 0$  ist. Im Falle  $f > 0$  kann das Tragwerk Starrkörperbewegungen durchführen. Ist  $f < 0$  ist das Tragwerk zwar stabil gelagert aber statisch überbestimmt.

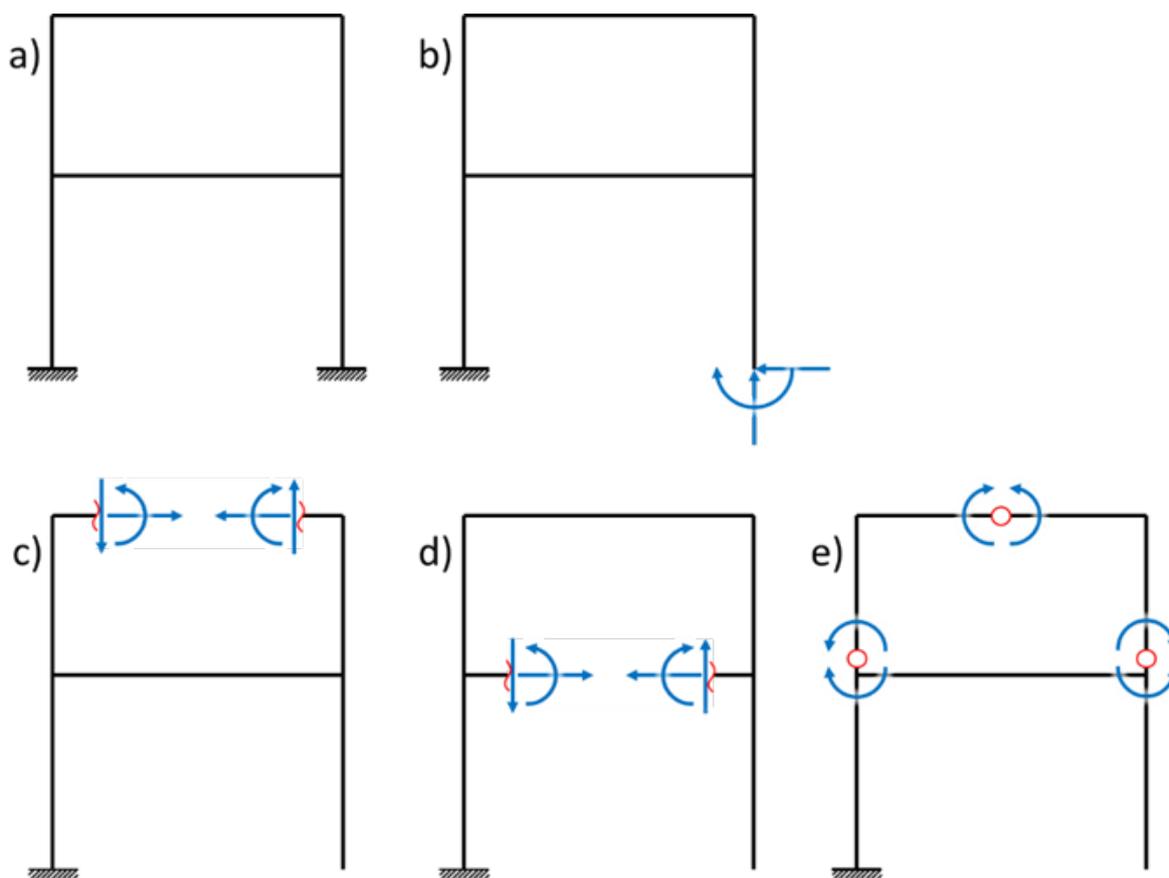


Abbildung 12 a) innerlich und äußerlich 3-fach statisch unbestimmter Rahmen, b) äußerlich statisch bestimmter Rahmen, c) - e) Auswahl an Möglichkeiten zur Übertragung in innerlich statisch bestimmte Teilsysteme. [Eigene Darstellung in Anlehnung an [16, S. 132]]

Im Falle von Abbildung 12 a) ist  $f = 3 - 6 = -3$ . Das heißt der Rahmen ist äußerlich statisch überbestimmt. Um den Rahmen statisch bestimmt zu machen, kann beispielsweise eine Einspannung weggeschnitten werden. An Stelle der Einspannung werden die 2 Schnittkräfte und das Schnittmoment angetragen (siehe Abbildung 12 b).

Um den Rahmen zudem noch innerlich statisch zu bestimmen, können beispielsweise wie in Abbildung 12 c) – d) Schnitte oder Loslager angebracht werden. Durch die Anzahl der Lagerreaktionen lässt sich die innerliche statische Unbestimmtheit ermitteln. Diese liegt für den Rahmen bei drei, da entweder ein Schnitt mit der Wertigkeit drei benötigt wird oder beispielsweise drei Gelenke mit jeweils der Wertigkeit eins. [14, S. 65]

### 3.3 Das Prinzip der virtuellen Arbeit

Mit Hilfe von Energiemethoden lassen sich einzelne Lagerreaktionen von statisch unbestimmten Systemen ermitteln [17, S. 206]. Da bei statisch unbestimmten Systemen nur bestimmte Ergebnisse gefragt sind, hat das Prinzip der virtuellen Kräfte, auch bekannt unter „Arbeiten mit Einheitslasten“, genau hier seine Vorteile. Zudem steht dem Anwender frei, welche Einflüsse, zum Beispiel die Querkraftanteile, mitberücksichtigt werden sollen. Steht ein umfangreiches Rechenprogramm zur Verfügung, welches alle Einflüsse exakt erfasst, kann eine Handrechnung auf Basis der virtuellen Kräfte allerdings nicht konkurrieren. [15, S. 433]

#### 3.3.1 Das Prinzip der virtuellen Kräfte

Der für elastische Körper gültige Arbeitssatz besagt, dass die äußerlich verrichtete Arbeit  $W$  als innere Energie  $\Pi$  im Körper gespeichert ist. [17, S. 210]

$$W = \Pi \quad (3.1)$$

Mit Hilfe dieses Arbeitssatzes ist es möglich die Verschiebung  $u$  zu berechnen. Die Verschiebung  $u$  stellt die Verschiebung des Punktes, an dem die Kraft angreift, in Krafrichtung dar. [17, S. 218]

Die äußerlich verrichtete Arbeit wird definiert als:

$$W = \frac{1}{2} F * u \quad (3.2)$$

Wenn anstatt der Kraft ein Moment anliegt, wird sie folgendermaßen definiert:

$$W = \frac{1}{2} M_0 * \varphi \quad (3.3)$$

Die innere Energie kann durch die einzelnen Beanspruchungsarten wie folgt superponiert werden:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int \frac{M_t^2}{GI_T} dx + \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int \frac{Q^2}{GA_s} dx \quad (3.4)$$

Liegt anstatt einer Kraft ein Moment am System an, kann der Verdrehwinkel mit Hilfe des Arbeitssatzes berechnet werden. Der Arbeitssatz kann nur bei statisch bestimmten Systemen angewendet werden, an denen nur eine Kraft oder ein Moment angreift. [17, S. 210]

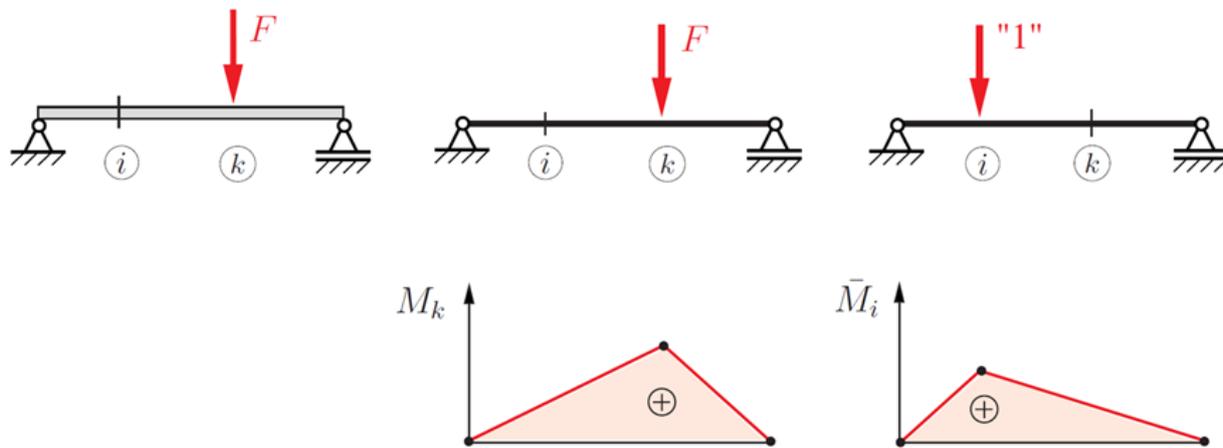


Abbildung 13 Beispiel-Berechnung der vertikalen Verschiebung im Punkt „i“ durch die Belastung F an der Stelle „k“ [17, S. 222]

Um Verschiebungen auch an beliebigen Stellen und Richtungen mit Hilfe des Arbeitssatzes bestimmen zu können, werden so genannte virtuelle Kräfte eingesetzt. Unter virtueller Kraft versteht man in diesem Zusammenhang eine gedachte Kraft, welche lediglich zur Berechnung herangezogen wird. Der Betrag der virtuellen Kraft wird zur Vereinfachung der Rechnung in der Regel mit einer dimensionslosen „1“ angesetzt. [17, S. 218-221]

Als Beispiel wird in Abbildung 13 an der Stelle „i“ eine virtuelle Kraft „1“ angebracht, um die vertikale Verschiebung an dieser Stelle in Folge der Belastung durch die Kraft F an der Stelle „k“ zu bestimmen. Der Arbeitssatz führt zur folgenden Formel für die Berechnung der Verschiebung. [17, S. 222]

$$u_{ik} = \int \frac{\bar{M}_i * M_k}{EI} dx \quad (3.5)$$

$u_{ik}$  stellt die Verschiebung an der Stelle „i“ durch die Belastung an der Stelle „k“ dar.  $M_k$  ist der Momentenverlauf in Folge der äußeren Kraft „F“.  $\bar{M}_i$  stellt den Momentenverlauf in Folge der virtuellen Kraft „1“ dar. [17, S. 222-223]

Im Allgemeinen wird auf die Indizes verzichtet was zur folgenden Formel führt.

$$u = \int \frac{M * \bar{M}}{EI} dx + \int \frac{M_T * \bar{M}_T}{GI_T} dx + \int \frac{N * \bar{N}}{EA} dx + \int \frac{Q * \bar{Q}}{GA_s} dx \quad (3.6)$$

Diese Formel berücksichtigt die zusammengesetzten Beanspruchungsarten aus Biegung, Torsion, Normal- und Querkräften. [17, S. 225]

### 3.3.2 Lösen statisch unbestimmter Systeme mit Hilfe virtueller Kräfte

Ein statisch unbestimmtes System muss zunächst, wie in 3.2 beschrieben, in ein statisch bestimmtes System überführt werden. Die durch die Überführung hinzukommenden unbekanntes Kräfte und Momente werden als  $X_n$  definiert. Das  $n$  steht für die Anzahl der statischen Unbestimmtheit und somit auch für die Anzahl der unbekanntes Kräfte beziehungsweise Momente. [17, S. 248]

Zur weiteren Berechnung wird die sogenannte Verschiebungseinflusszahl benötigt. Die Zahl ist wie folgt mit zwei Indizes versehen  $\alpha_{ik}$ . Sie beschreibt die Verschiebung an der Stelle „i“ durch eine Kraft an der Stelle „k“. [17, S. 258]

Die Verschiebungseinflusszahl kann als Verschiebung an der Stelle i durch eine Belastung an der Stelle k betrachtet werden bei der die Kraft als Proportionalitätsfaktor abgespalten wurde [17, S. 237]:

$$f_{ik} = \alpha_{ik} * F_k \quad (3.7)$$

Beim einfach statisch unbestimmten Balken lässt sich die unbekanntes Kraftgröße  $X_1$  mit Hilfe der beiden Verschiebungseinflusszahlen  $\alpha_{10}$  und  $\alpha_{11}$  berechnen. Die Verschiebungseinflusszahlen berechnen sich aus den Schnittmomenten des „0-“ und „1-Systems“. Das „0-System“ stellt dabei das statisch bestimmte System mit allen angreifenden Lasten ohne die unbekanntes Kraft  $X_1$  dar. Das „1-System“ stellt das statisch bestimmte System ohne die angreifenden Lasten dar. An der Stelle der unbekanntes Kraft  $X_1$  wird die dimensionslose „1“ Kraft eingesetzt. [17, S. 240-242]

$$\alpha_{10} = \int \frac{\bar{M}_1 * M_0}{EI} dx \quad (3.8)$$

$$\alpha_{11} = \int \frac{\bar{M}_1 * \bar{M}_1}{EI} dx$$

Mit Hilfe der beiden Verschiebungseinflusszahlen lässt sich nun die tatsächliche Kraft  $X_1$  berechnen.

$$X_1 = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} \quad (3.9)$$

Bei mehrfach statisch unbestimmten Systemen muss das folgende Gleichungssystem gelöst werden um die unbekanntes Kräfte und Momente  $X_1, X_2 \dots X_n$  zu berechnen. Das tiefgestellte  $n$  steht für die Anzahl der unbekanntes Kräfte bzw. Momente. [17, S. 248]

$$\begin{aligned} \alpha_{10} + X_1 * \alpha_{11} + \dots + X_n * \alpha_{1n} &= 0 \\ \alpha_{20} + X_1 * \alpha_{21} + \dots + X_n * \alpha_{2n} &= 0 \\ &\dots \\ \alpha_{n0} + X_1 * \alpha_{n1} + \dots + X_n * \alpha_{nn} &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Die Verschiebungseinflusszahl zum jeweiligen „0-System“ berechnet sich dabei wie folgt.

$$\alpha_{n0} = \int \frac{\bar{M}_n * M_0}{EI} dx \quad (3.11)$$

Das tiefgestellte  $n$  repräsentiert die Anzahl der notwendigen Hilfssysteme aufgrund der unbekanntes Kräfte  $X_1, X_2 \dots X_n$ . Die Variable  $\bar{M}_n$  stellt den Momentenverlauf infolge der „1“-Kräfte im jeweiligen Hilfssystem dar.

Parallel zu den Verschiebungseinflusszahlen zum „0-System“ werden die notwendigen Verschiebungseinflusszahlen der verschiedenen Systeme untereinander berechnet.

$$\alpha_{nn} = \int \frac{\bar{M}_n * \bar{M}_n}{EI} dx \quad (3.12)$$

In der Regel wird ein System nicht nur durch Biegemomente belastet. Sollen Quer- und Normalkräfte mitberücksichtigt werden, so muss die Berechnung der Verschiebungseinflusszahl erweitert werden. Die Berücksichtigung der Quer- und Normalkraftverläufe führt zu folgender Formel für die Verschiebungseinflusszahlen:

$$\alpha_{n0} = \int \frac{\bar{M}_n * M_0}{EI} dx + \int \frac{\bar{M}_{Tn} * M_{T0}}{GI_T} dx + \int \frac{\bar{N}_n * N_0}{EA} dx + \int \frac{\bar{Q}_n * Q_0}{GA_S} dx \quad (3.13)$$

Bzw.

$$\alpha_{nn} = \int \frac{\bar{M}_n * M_n}{EI} dx + \int \frac{\bar{M}_{Tn} * M_{Tn}}{GI_T} dx + \int \frac{\bar{N}_n * N_n}{EA} dx + \int \frac{\bar{Q}_n * Q_n}{GA_S} dx \quad (3.14)$$

### 3.4 Auslegung von Mehrschichtverbund Laminaten

Zur Auslegung von Mehrschichtverbundlaminaten bedient man sich in der Regel der klassischen Laminattheorie. Sie kann in zwei Schritte unterteilt werden: die mechanische Charakterisierung des Gesamtlaminats aus den Grundelastizitätsgrößen der Einzelschichten sowie die Ermittlung der Verzerrungen und Spannungen infolge angreifender Lasten. Da die klassische Laminattheorie keine direkte Betrachtung von Profilen zulässt, kann lediglich der erste Schritt für diese Arbeit genutzt werden. Zur Bestimmung der Dehnungen und Spannungen wird daher alternativ auf die klassischen Berechnungsmethoden der Mechanik zurückgegriffen. Dabei werden die Regeln der Berechnung von Verbundquerschnitte genutzt. [2, S. 219]

Die Netztheorie, eine alternative Berechnungsmethode, welche bereits vor der klassischen Laminattheorie Anwendung fand, gibt in der Regel ungenauere Ergebnisse als die klassische Laminattheorie wieder. Diese beruht unter anderem darauf, dass ausschließlich die Fasern betrachtet werden und die Matrix vernachlässigt wird. Sie wird in der Regel nur zur ersten Grobauslegung genutzt. [2, S. 451]

Nach der Bestimmung der auftretenden Spannungen muss eine Versagensanalyse durchgeführt werden. Dabei müssen die verschiedenen Versagensarten Schichtweise untersucht werden.

Die Einflüsse durch Temperatur sowie Feuchte, wie sie beispielsweise ausführlich in [2, S. 247-295] behandelt werden, sollen in dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden. Auch Eigenspannungen, die durch die Fertigung entstehen, sollen keine Berücksichtigung finden.

#### 3.4.1 Bestimmung der Grundelastizitätsgrößen der Einzelschicht

Die Basis für die Berechnung der Einzelschicht-Steifigkeitswerte  $\bar{Q}$  bilden die **Grundelastizitätsgrößen** einer jeden einzelnen UD-Schicht:  $E_{\parallel}$ ,  $E_{\perp}$ ,  $G_{\perp\parallel}$ ,  $\nu_{\perp\parallel}$ ,  $\nu_{\parallel\perp}$ . Der Index  $\parallel$  bezieht sich auf Eigenschaften parallel zur Faser und  $\perp$  senkrecht dazu.  $E_{\parallel}$  stellt somit das Längs-Elastizitätsmodul und  $E_{\perp}$  das Quer-Elastizitätsmodul einer UD-Schicht dar.  $G_{\perp\parallel}$  ist das Quer-Längs-Schubmodul. Die Querkontraktionen Quer-Längs sowie Längs-Quer werden durch  $\nu_{\perp\parallel}$ ,  $\nu_{\parallel\perp}$  ausgedrückt. Zur Bestimmung der Grundelastizitätsgrößen gibt es mehrere Möglichkeiten [2, S. 185]:

- Verwendung von Faser-Matrixsystemen die weit verbreitet sind und die Grundelastizitätsgrößen somit aus der Literatur entnommen werden können. Zur Vorauslegung können auch die Werte ähnlicher Faser-Matrixsysteme herangezogen werden.

- Bestimmung der Werte mit Hilfe mikro-mechanischer Formeln. Dieses Vorgehen bietet sich an, wenn verschiedene Varianten miteinander verglichen werden sollen und wird insbesondere für Vorauslegungen eingesetzt.
- Mit Hilfe eines Versuches lassen sich Werte ermitteln, welche die Realität am besten widerspiegeln. Allerdings ist die experimentelle Untersuchung des Laminats sehr zeit- und kostenintensiv.

Im Folgenden sollen die mikro-mechanischen Formeln für die Berechnung der Grundelastizitätsgrößen kurz dargestellt werden. Der Index  $f$  steht für die faserbezogenen und  $m$  für die matrixbezogenen Größen.  $\varphi$  steht für den Faservolumenanteil in der UD-Schicht. Diese Werte werden typischerweise von Faser- bzw. Matrixherstellern zur Verfügung gestellt.

#### Längs-Elastizitätsmodul $E_{\parallel}$ :

$$E_{\parallel} = E_{f\parallel} * \varphi + E_m * (1 - \varphi) \quad (3.15)$$

Da das E-Modul der Matrix gegenüber der Faser sehr klein ist, kann das Längselastizitätsmodul auch näherungsweise ohne den zweiten Term berechnet werden. [2, S. 190-191]

#### Quer-Elastizitätsmodul $E_{\perp}$ :

$$E_{\perp} = \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} * \frac{1 + 0,85 * \varphi^2}{(1 - \varphi)^{1,25} + \frac{E_m}{(1 - \nu_m^2) * E_{f\perp}} * \varphi} \quad (3.16)$$

Dabei handelt es sich bei dieser Gleichung um eine halbempirische Gleichung. Die ursprüngliche, theoretisch und physikalisch begründete Gleichung zeigt Abweichungen zu den realen Werten. Diese Anpassung auf Grundlage von Versuchsergebnissen führt zur oben dargestellten Gleichung. [2, S. 194-195]

#### Quer-Längs Schubmodul $G_{\perp\parallel}$ :

$$G_{\perp\parallel} = G_m * \frac{1 + 0,4 * \varphi^{0,5}}{(1 - \varphi)^{1,45} + \frac{G_m}{G_{f\perp\parallel}} * \varphi} \quad (3.17)$$

Da auch die Gleichung für das Quer-Längs Schubmodul an experimentelle Ergebnisse angepasst wurde, handelt es sich bei der oben dargestellten Gleichung zur Berechnung des Quer-Längs Schubmoduls ebenfalls um eine halbempirische Gleichung. [2, S. 196-197]

**Querkontraktionszahl  $v_{\perp\parallel}$ :**

$$v_{\perp\parallel} = \varphi * v_{f,\perp\parallel} + (1 - \varphi) * v_m \tag{3.18}$$

Ähnlich dem Längs-Elastizitätsmodul ergibt sich für die Berechnung der Querkontraktionszahl  $v_{\perp\parallel}$  eine Mischungsregel bezogen auf den Faservolumenanteil. [2, S. 197-199]

**Querkontraktionszahl  $v_{\parallel\perp}$ :**

$$v_{\parallel\perp} = \frac{E_{\perp} * v_{\perp\parallel}}{E_{\parallel}} \tag{3.19}$$

Unter der Annahme kleiner Verformungen und linearem, elastischen Werkstoffverhalten sind die Querkontraktionszahlen voneinander abhängig. Dies führt zur oben dargestellten Formel. Der Vergleich mit FE-Berechnungen zeigt eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse. [2, S. 199-200]

Um berechnete Grund-Elastizitätsgrößen auf Plausibilität prüfen zu können und um eine Vorstellung der Größenordnung zu bekommen, werden beispielhaft in Tabelle 4 die Werte für glasfaserverstärktes Epoxidharz (GF-EP mit E-Glasfaser) und kohlenstofffaserverstärktes Epoxidharz (CF-EP mit HT-Faser) aufgelistet.

Tabelle 4 Grund-Elastizitätsgrößen für glasfaser- und kohlenstofffaserverstärktes Epoxidharz bei einem Faservolumenanteil von 60 %. [2, S. 202]

	$E_{\parallel}$ in N/mm <sup>2</sup>	$E_{\perp}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{\perp\parallel}$ in N/mm <sup>2</sup>	$G_{\parallel\perp}$ in N/mm <sup>2</sup>	$v_{\perp\parallel}$ [ - ]	$v_{\parallel\perp}$ [ - ]	$v_{\perp\perp}$ [ - ]
GF-EP (E-Glasfaser)	45 160	14 700	5 300	5 330	0,30	0,10	0,38
CF-EP (HT-Faser)	139 360	8 800	4 600	3 200	0,29	0,02	0,37

Mit Hilfe der berechneten, durch Literatur bekannten oder experimentell ermittelten Grundelastizitätsgrößen können die Einzel-Schichtsteifigkeitswerte  $\bar{Q}$  berechnet werden. Die Formeln (3.20) bis (3.25) zeigen wie sich diese zusammensetzen. Da die Ausrichtungen der einzelnen UD-Schichten in der Regel nicht übereinstimmen, müssen diese vom lokalen Schichtkoordinatensystem in ein globales Laminatkoordinatensystem transformiert werden. Diese Transformation ist bereits in den Formeln für die Einzel-Schichtsteifigkeitswerte integriert. Der Winkel  $\alpha$  repräsentiert hierbei den Winkelversatz vom Schichtkoordinatensystem zum globalen Laminatkoordinatensystem. [2, S. 213-214]

$$\bar{Q}_{11} = \frac{E_{\parallel}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} * \cos^4 \alpha + \frac{E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} * \sin^4 \alpha + \frac{\sin^2 2\alpha}{2} * \left( \frac{\nu_{\perp\parallel} * E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} + 2 * G_{\perp\parallel} \right) \quad (3.20)$$

$$\bar{Q}_{22} = \frac{E_{\parallel}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} * \sin^4 \alpha + \frac{E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} * \cos^4 \alpha + \frac{\sin^2 2\alpha}{2} * \left( \frac{\nu_{\perp\parallel} * E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} + 2 * G_{\perp\parallel} \right) \quad (3.21)$$

$$\bar{Q}_{66} = G_{\perp\parallel} + \frac{\sin^2 2\alpha}{4} \left( \frac{E_{\parallel}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} + \frac{E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} - 2 * \frac{\nu_{\perp\parallel} * E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} - 4 * G_{\perp\parallel} \right) \quad (3.22)$$

$$\bar{Q}_{12} = \frac{\nu_{\perp\parallel} * E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} + \frac{\sin^2 2\alpha}{4} \left( \frac{E_{\parallel}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} + \frac{E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} - 2 * \frac{\nu_{\perp\parallel} * E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} - 4 * G_{\perp\parallel} \right) \quad (3.23)$$

$$\bar{Q}_{16} = \frac{1}{2} * \sin 2\alpha * \left[ \left( \frac{E_{\parallel}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} + \frac{E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} - 2 * \frac{\nu_{\perp\parallel} * E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} - 4 * G_{\perp\parallel} \right) * \sin^2 \alpha - \left( \frac{E_{\parallel}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} - \frac{\nu_{\perp\parallel} * E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} - 2 * G_{\perp\parallel} \right) \right] \quad (3.24)$$

$$\bar{Q}_{26} = -\frac{1}{2} * \sin 2\alpha * \left[ \left( \frac{E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} - \frac{\nu_{\perp\parallel} * E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} - 2 * G_{\perp\parallel} \right) - \left( \frac{E_{\parallel}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} + \frac{E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} - 2 * \frac{\nu_{\perp\parallel} * E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} - 4 * G_{\perp\parallel} \right) \sin^2 \alpha \right] \quad (3.25)$$

Die bisher betrachteten Berechnungen beziehen sich auf UD-Schichten. Gewebe sind im Prinzip aufeinandergelegte, versetzte UD-Schichten. Der Aufbau eines Gewebes zwingt jedoch die einzelnen Fasern in eine bestimmte Form. Die dadurch bedingte Faserwelligkeit hat negativen Einfluss auf die Steifigkeits- und Festigkeitseigenschaften. Idealerweise werden diese

Einflüsse experimentell am zu untersuchenden Laminat bestimmt und entsprechend berücksichtigt. Liegen keine genauen Werte vor, empfiehlt Schürmann eine Steifigkeitsreduktion von 10 % anzusetzen. [2, S. 239-240]

Mit Hilfe der berechneten Einzelschichtsteifigkeiten im Laminat-Koordinatensystem kann die Gesamtsteifigkeitsmatrix gebildet werden [2, S. 213]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Betrachtet man nun die Einzelschichtsteifigkeiten im Laminat-Koordinatensystem kann durch lösen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{\parallel}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} & \frac{\nu_{\perp\parallel} * E_{\parallel}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} & 0 \\ \frac{\nu_{\perp\parallel} * E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} & \frac{E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} * \nu_{\parallel\perp}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\perp\parallel} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

auf die Grundelastizitätsgrößen in der Schicht geschlossen werden. [2, S. 207] Die Grundelastizitätsgrößen E-Modul, G-Modul und Querkontraktionszahlen werden auch als Ingenieurskonstante bezeichnet [2, S. 182].

### 3.4.2 Dehnungen und Spannung aufgrund von Biegung und Zug/Druck

Wird ein ebener Spannungszustand betrachtet, kann zur Bestimmung der Laminatdehnungen von Faserverbundwerkstoffen auf die Berechnungsmethodik der Verbundquerschnitte zurückgegriffen werden. Diese beruht auf dem bekannten Elastizitätsgesetz der Technischen Mechanik:  $\sigma = E * \varepsilon$ . Durch Wichtung der unterschiedlichen Schicht-E-Module können die Kenngrößen rechtwinklig zum Profilquerschnitt des **gesamten Laminatprofils** berechnet werden: E-Modul  $(E)_{ges}$ , ideeller Flächenschwerpunkt  $(z)_{ges}$ , Dehnsteifigkeit  $(EA)_{ges}$ , Biegesteifigkeit  $(EI)_{ges}$  sowie das Flächenträgheitsmoment  $(I)_{ges}$ . Voraussetzung hierfür ist, dass die einzelnen Laminatschichten fest miteinander verbunden sind. [17, S. 277-295]

$$(E)_{ges} = \frac{\sum E_i * A_i}{\sum A_i} \quad (3.28)$$

$E_i$  stellt hierbei das E-Modul der einzelnen Schicht senkrecht zur Querschnittsfläche dar. Die Querschnittsfläche der jeweiligen Schicht wird durch  $A_i$  beschrieben.

$$(z)_{ges} = \frac{\sum E_i * z_{mi} * A_i}{\sum E_i * A_i} \quad (3.29)$$

Die einzelnen Schicht-Flächenschwerpunkte werden durch  $z_m$  beschrieben. Die Basis der einzelnen Schicht-Flächenschwerpunkte ist beliebig wählbar, muss nur für alle Flächen identisch sein.

$$(EA)_{ges} = \sum E_i A_i \quad (3.30)$$

$$(EI)_{ges} = \sum E_i I_i \quad (3.31)$$

Die Gesamt-Dehnsteifigkeit  $(EA)_{ges}$  berechnet sich aus der Summe der Schicht-Dehnsteifigkeiten. Ähnlich verhält es sich bei der Gesamt-Biegesteifigkeit  $(EI)_{ges}$ . Diese setzt sich aus der Summe der Schicht-Biegesteifigkeiten zusammen. Bei den Flächenträgheitsmomenten der einzelnen Schichten  $I_i$  ist darauf zu achten, dass es sich hierbei immer um das Flächenträgheitsmoment um die ideale Faser  $(z)_{ges}$  handeln muss und nicht um das Flächenträgheitsmoment um die Achse durch den eigenen Flächenschwerpunkt. [17, S. 287]

$$(I)_{ges} = \frac{(EI)_{ges}}{(E)_{ges}} \quad (3.32)$$

Das Gesamt-Flächenträgheitsmoment ist der Quotient aus Gesamt-Biegesteifigkeit  $(EI)_{ges}$  und Gesamt-E-Modul  $(E)_{ges}$ .

Die Dehnung aufgrund einer Zug-/Druck-Beanspruchung ist bei symmetrischen Profilen über die gesamte Querschnittsfläche des Laminats gleich. Sie kann durch die angreifende Kraft  $N$  und der Dehnsteifigkeit  $(EA)_{ges}$  wie folgt bestimmt werden:

$$\varepsilon_{Zug/Druck} = \frac{N}{(EA)_{ges}} \quad (3.33)$$

Dehnungen aufgrund von Biegung sind abhängig vom Abstand zur ideellen Faser. Dies führt für die Berechnung der Dehnungen aufgrund von Biegung zur folgenden Formel:

$$\varepsilon_{Biegung} = z * \left( \frac{M}{(EI)_{ges}} \right) \quad (3.34)$$

Dabei repräsentiert  $z$  den Abstand zur ideellen Faser und  $M$  das anliegende Moment. Anhand der Formel ist bereits ersichtlich, dass die Dehnung aufgrund von Biegung über den Gesamten

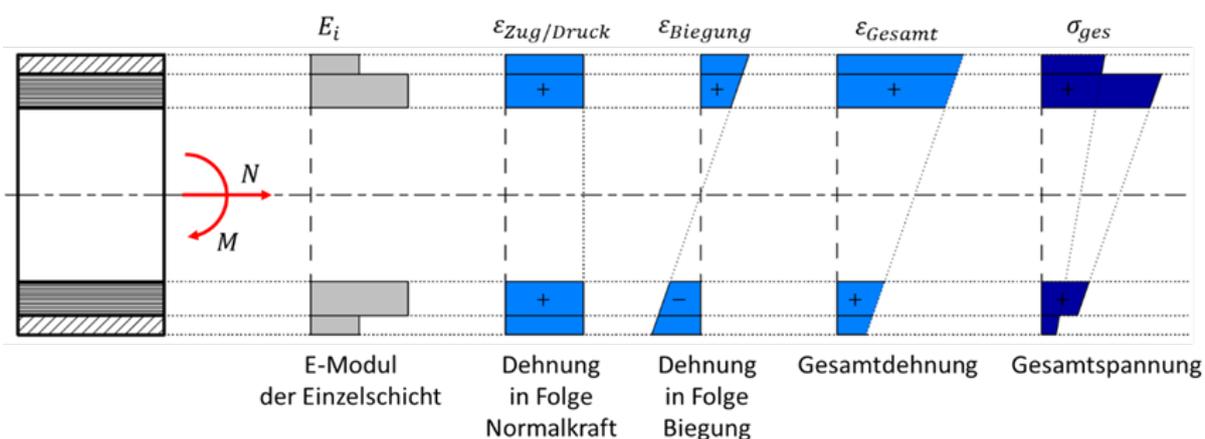
Querschnitt linear verläuft. Um die Gesamtdehnung aufgrund von Biegung und Zug/Druck zu erhalten werden die beiden einzelnen Dehnungen addiert.

$$\epsilon_{Gesamt} = \epsilon_{Zug/Druck} + \epsilon_{Biegung} \tag{3.35}$$

Die jeweiligen Schichtspannungen berechnen sich nun aus dem Elastizitätsgesetz. Dabei muss aufgrund der unterschiedlichen E-Module und dem Abstand zur ideellen Faser jeder Punkt einzeln betrachtet werden.

$$\sigma_{ges} = E_i * \epsilon \tag{3.36}$$

Abbildung 14 soll den Zusammenhang der einzelnen Dehnungen, der Gesamtdehnung sowie der Gesamtspannung in den einzelnen Schichten qualitativ veranschaulichen.



**Abbildung 14 : Darstellung der Zusammensetzung von Gesamtdehnung und Gesamtspannung an einem Verbundquerschnitt aufgrund von Biege- und Zugbeanspruchung. [Eigene Darstellung in Anlehnung an [17, S. 277-295]]**

In Abbildung 14 ist ganz links ein Rohrprofil mit zwei unterschiedlichen Materialschichten im Schnitt dargestellt. Rechts daneben sind die E-Module der beiden Schichten abgebildet. Infolge der in rot dargestellten Belastungen Moment *M* und Normalkraft *N*, ergeben sich die unterschiedlichen Dehnungen, welche in der Gesamtdehnung zusammengeführt sind. Die ganz rechts dargestellte Spannung repräsentiert das Produkt aus Gesamtdehnung und E-Modul der einzelnen Schichten.

### 3.4.3 Versagensarten von UD-Schichten

Faserverbundkunststoffe zeigen im Gegensatz zu herkömmlichen Werkstoffen unterschiedliche Versagensarten. Die Art des Versagens kann auf die drei Komponenten Faser, Matrix oder Grenzfläche aufgeteilt werden. Das Versagen der Faser führt zum Faserbruch. Ein Matrixversagen äußert sich durch Zwischenfaserbruch. Trennen sich einzelne Schichten an der

Grenzfläche spricht man von Delamination. Die Beanspruchungen des Laminats, welche zum Versagen führen, werden in Längs-  $\sigma_{\parallel}$  und Querbeanspruchungen  $\sigma_{\perp}$  zur Faser unterteilt, zusätzlich in Quer-Längs-, bzw. Längs-Quer-Schubbeanspruchung  $\tau_{\perp\parallel}$  sowie Quer-Quer-Schubbeanspruchung  $\tau_{\perp\perp}$ . Bei den beiden Normalbeanspruchungen  $\sigma_{\parallel}$  und  $\sigma_{\perp}$  muss zudem noch zwischen Zug ( $\sigma_{\parallel}^+$ ,  $\sigma_{\perp}^+$ ) und Druckspannungen ( $\sigma_{\parallel}^-$ ,  $\sigma_{\perp}^-$ ) unterschieden werden. Zu den eben genannten Basis-Beanspruchungen gibt es sogenannte Basis-Festigkeitswerte „R“:

$$\begin{array}{lll} \sigma_{\parallel}^+ \rightarrow R_{\parallel}^+ & \sigma_{\perp}^+ \rightarrow R_{\perp}^+ & \tau_{\perp\parallel} \rightarrow R_{\perp\parallel} \\ \sigma_{\parallel}^- \rightarrow R_{\parallel}^- & \sigma_{\perp}^- \rightarrow R_{\perp}^- & \tau_{\perp\perp} \rightarrow R_{\perp\perp} \end{array} \quad (3.37)$$

Aufgrund der Komplexität sowie der vielen herstellungsbedingten Einflüsse von Laminaten ist, wie bei den meisten anderen Werkstoffen auch, die experimentelle Bestimmung der Festigkeitswerte notwendig. [2, S. 343-346]

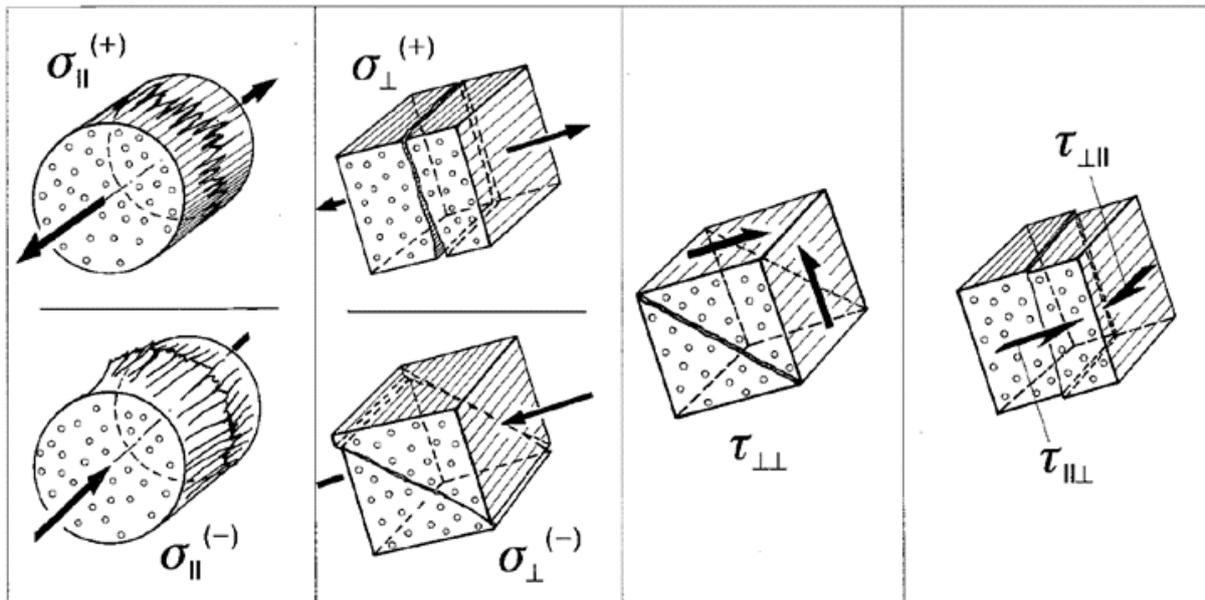


Abbildung 15 Basis-Beanspruchungen des UD-Verbunds sowie die jeweils zu erwartende Bruchebene [18, S. 4]

In Abbildung 15 sind die einzelnen Basisbeanspruchungen mit den dazugehörigen zu erwartenden Bruchebenen dargestellt. Auffällig ist, dass die Wirkebene der Beanspruchung nicht zwingend mit der Bruchebene zusammenfällt. Die Wirkebene beschreibt die Ebene, in der eine einzeln wirkende Spannung maximal wird. Dies ist sehr anschaulich bei der  $\sigma_{\perp}^-$ -Belastung zu erkennen. Die reale Bruchfläche ist hier bei etwa  $53^\circ$  zu erwarten und nicht in der Wirkebene, welche in diesem Fall rechtwinklig zur Belastungsrichtung zeigt. [2, S. 364-365]

- **Faserbruch**

Von Faserbruch ist die Rede, wenn nahezu gleichzeitiges Versagen von einigen hundert Einzelfasern eintritt. Hervorgerufen wird Faserbruch in der Regel nur durch eine faserparallele Zug- bzw. Druckbeanspruchung ( $\sigma_{\parallel}^+$ ,  $\sigma_{\parallel}^-$ ). Theoretisch besteht zudem die Möglichkeit, dass Fasern aufgrund von Scherung brechen. Da allerdings die Scherfestigkeit von den meisten Fasern vergleichsweise hoch ist, tritt dieser Fall in der Regel nicht ein. [2, S. 346-349]

Die Basis-Festigkeit  $R_{\parallel}^+$  kann, im Gegensatz zu den anderen Basis-Festigkeitswerten, sehr gut rechnerisch ermittelt werden. Mit Hilfe der Mischungsregel und durch Vernachlässigen der Matrixstruktur, kann die Basis-Festigkeit  $R_{\parallel}^+$  allein durch den Faservolumenanteil und der Einzelfaser-Festigkeit in Längsrichtung bestimmt werden (siehe Formel (3.38)). Da Vorschädigungen und Herstellungseinflüsse festigkeitsmindernd wirken, kann nicht die theoretisch berechnete Festigkeit erreicht werden. Dieser Einfluss kann mittels Korrekturfaktor berücksichtigt werden. [2, S. 346-349]

$$R_{\parallel}^+ = R_{f\parallel}^+ * \varphi \quad (3.38)$$

In einer UD-Schicht wird die Spannung durch Zugbelastung nahezu ausschließlich durch die Faser getragen. Die Belastung konzentriert sich somit auf der Faser-Querschnitts-Fläche. Aus diesem Grund sind die tatsächlichen Spannungen an der Faser um einiges höher als die an der gesamten UD-Schicht anliegenden. [2, S. 348]

Die Basis-Festigkeit  $R_{\parallel}^-$  beschreibt die Festigkeit gegenüber makromechanischem Schubknicken bei Druckbelastung in Faserrichtung. Das bekannte Biegeknicken tritt nicht auf. Ehe eine Überschreitung von  $R_{\parallel}^-$  erreicht wird ist primär mit einem globalen Steifigkeitsversagen der Struktur bzw. Zwischenfaserbruch zu rechnen. Aus diesem Grund spielt die Festigkeit gegenüber der Druckbelastung eine untergeordnete Rolle. [2, S. 350-351]

- **Zwischenfaserbruch**

Laut Puck [18] sind im ebenen Spannungszustand drei unterschiedliche Bruchmodi für Zwischenfaserbruch zu betrachten: Modus A, B und C (siehe Abbildung 16). Diese Betrachtungsweise berücksichtigt die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Basis-Beanspruchungsarten. [18, S. 14-18]

---

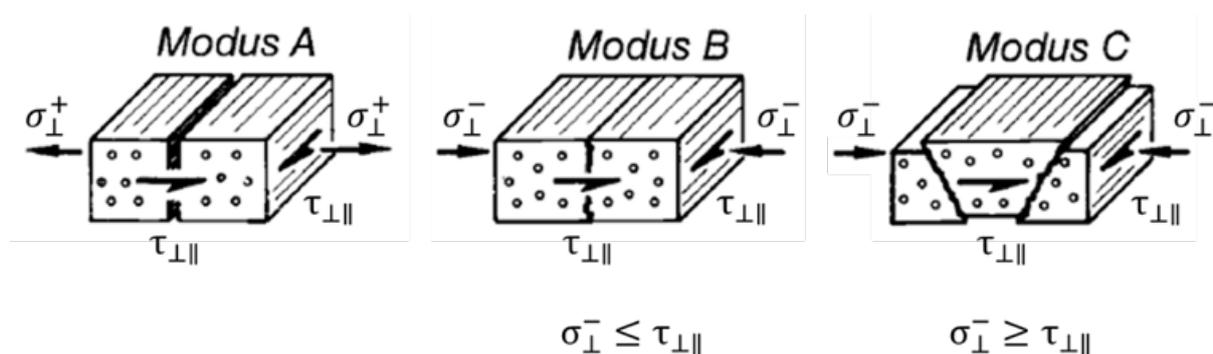


Abbildung 16 Bruchmodus A, B und C mit den dazugehörigen Basisbeanspruchungen  $\sigma_{\perp}^+$ ,  $\sigma_{\perp}^-$  und  $\tau_{\perp\parallel}$  sowie den zu erwartenden Bruchflächen. Abbildung in Anlehnung an [18, S. 61].

**Modus A** beschreibt das Versagen durch Zugbelastung quer zur Faser  $\sigma_{\perp}^+$  bei gleichzeitiger Schubbeanspruchung quer/längs zur Faser  $\tau_{\perp\parallel}$ . Die Grenzzustände bei denen allein  $\sigma_{\perp}^+$  oder  $\tau_{\perp\parallel}$  für das Versagen verantwortlich sind werden in Modus A mitberücksichtigt. Wie in Abbildung 16 links dargestellt, führen die zuvor genannten Beanspruchungen zu einer Bruchfläche in der Wirkebene und somit in Faserrichtung. Je größer das Verhältnis  $\sigma_{\perp}^+$  zu  $\tau_{\perp\parallel}$  ist, desto weiter öffnet sich der Bruch. [18, S. 15]

**Modus B** stellt das Versagen aufgrund gleichzeitiger Druckbelastung quer zur Faser  $\sigma_{\perp}^-$  und Schubbeanspruchung quer/längs zur Faser  $\tau_{\perp\parallel}$  dar. Anzumerken ist, dass die Druckbelastung  $\sigma_{\perp}^-$  kleiner oder maximal genauso groß sein darf wie die Schubspannung  $\tau_{\perp\parallel}$ . Die Schubspannung stellt im Prinzip die alleinige Ursache für Zwischenfaserbruch dar. Die Druckspannung führt lediglich zu einer erhöhten inneren Reibung in der Bruchfläche. Somit erhöht die Druckspannung die ertragbare Schubspannung. Auch hier verläuft die Bruchfläche in der Wirkebene, und somit in Faserrichtung (siehe Abbildung 16 mittig). Im Gegensatz zu Modus A kann sich der Riss aufgrund der Druckspannung  $\sigma_{\perp}^-$  jedoch nicht öffnen. In Laminaten mit drei oder mehr Faserrichtungen kommt Zwischenfaserbruch des Modus B selten vor. [18, S. 16]

**Modus C** ist von den Grundbeanspruchungen identisch zu Modus B (siehe Abbildung 16 rechts). Allerdings ist zu beachten, dass die Druckbeanspruchung  $\sigma_{\perp}^-$  gleich oder größer als die Schubbeanspruchung  $\tau_{\perp\parallel}$  sein muss. Die Bruchfläche stimmt im Modus C nicht mehr mit der Wirkebene überein, sondern ist um einen bestimmten Winkel geneigt. Der Winkel kann von  $0^\circ$  bis etwa  $50^\circ$  variieren und ist abhängig vom Druck-Schub-Beanspruchungsverhältnis. Da unter diesem Winkel nicht mehr allein die beiden  $\sigma_{\perp}^-$ - und  $\tau_{\perp\parallel}$ -Beanspruchungen wirken, muss die Quer/Quer-Schubbeanspruchung  $\tau_{\perp\perp}$  mitberücksichtigt werden. [18, S. 16]

- **Delamination**

Die Grenzflächen zwischen einzelnen Schichten bilden aufgrund ihrer fehlenden Faserverstärkung eine ähnliche Schwachstelle wie die faserparallele Schnittebene der UD-Schicht. Laut Puck [18] müsste das Versagen der Grenzfläche zwischen einzelnen Schichten eigentlich als „Zwischenschichtbruch“ bezeichnet werden. Die gängige Bezeichnung ist jedoch „Delamination“. Zur Delamination kommt es, wenn ausreichend hohe „interlaminare Spannungen“ vorliegen. Als interlaminare Spannungen werden im räumlichen Spannungszustand die Zugspannungen senkrecht zur Schicht und die Schubspannungen in der Grenzfläche bezeichnet. Laut Puck [18] zeigen Lamine die nicht besonders dick sind oder besonders kleine Krümmungsradien aufweisen geringe interlaminare Spannungen. Aus diesem Grund kann man davon ausgehen, dass Delamination in keinem Fall durch interlaminare Spannungen ausgelöst wird, sondern bereits ein Zwischenfaserbruch vorliegt der zur Delamination führt. [18, S. 18-19]

### 3.4.4 Festigkeitsanalyse von Laminaten

Bei isotropen Werkstoffen wie Metallen, werden üblicherweise die dreidimensionalen inneren Spannungen zu einer Vergleichsspannung zusammengefasst. Diese Vergleichsspannung wird dann mit, aus 1-achsigen Zugversuchen ermittelten, Festigkeitswerten verglichen und somit die Festigkeit bestimmt. [15, S. 399]

Bei anisotropen Werkstoffen wie dem FVK kann nicht mit einer Vergleichsspannung gearbeitet werden. Die richtungsabhängigen Festigkeiten lassen dies nicht zu. Zudem werden die einzelnen Schichten eines FVK, je nach Faserorientierung, unterschiedlich stark belastet. Aus diesem Grund müssen die Schichten einzeln betrachtet und eine schichtweise Analyse durchgeführt werden. Ein Zwischenfaserbruch in einer einzelnen Schicht bedeutet nicht zwangsläufig ein Versagen des kompletten Laminats. Mit Hilfe einer Degradationsanalyse kann man den Einfluss eines Risses in einer Schicht betrachten. Dabei wird untersucht inwieweit dieser Riss einen Einfluss auf die Spannungsumlagerung der verbleibenden Schichten darstellt. [2, S. 393-394]

Bei der Festigkeitsanalyse gibt es unterschiedliche Ansätze. Es wird unterschieden in pauschale Bruchkriterien und differenzierende Bruchkriterien. Zu den pauschalen Kriterien gehört das Tsai-Wu Kriterium, das globale Spannungskriterium und das globale Dehnungskriterium. Gemeinsam haben diese Kriterien, dass bei einer Überschreitung der zulässigen Festigkeitswerte ein Laminatversagen eintritt, welches nicht genauer spezifiziert wird. Von Schürmann wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass das Tsai-Wu Kriterium nicht mehr verwendet werden soll, da es zu unrealistischen Ergebnissen führen kann [2, S. 434]. Differenzierende Bruchkriterien geben zusätzlich Auskunft darüber welche Art von Bruch eintritt. Allgemein besteht

---



Betrachtet man Zwischenfaserbrüche lassen sich die Versagensarten, wie auch schon in Abschnitt 3.4.3 beschrieben, in drei unterschiedliche Modi unterscheiden. In Abbildung 17 werden die unterschiedlichen Modi in Abhängigkeit von der Spannungscombination, bei der sie auftreten, dargestellt.

Die dargestellte Kurve ist in drei Teilbereiche unterteilt und bezüglich der X-Achse symmetrisch. In positive X-Richtung zeigt die Zugspannung, entgegengesetzt in negative Richtung die Druckspannung. Auf der Y-Achse sind die Schubspannungen aufgetragen. Die Kurve ist in drei Abschnitte unterteilt. Abschnitt a bis b, welche zum Bruchmodus A führt. Abschnitt b bis c der zum Bruchmodus B führt und Abschnitt c bis d welcher zum Bruchmodus D führt. In der Abbildung ist ersichtlich, dass ein Versagen der Matrix erst bei höheren Druckspannungen auftritt im Gegensatz zu Zugspannungen. [2, S. 423-425]

### 3.4.5 Optimierungsmöglichkeiten

Ziel muss es sein, ein Laminat so zu gestalten, dass nicht der Zwischenfaserbruch das entscheidende Versagenskriterium ist, sondern Faserbruch. Somit wird gewährleistet, dass die hohen Faserfestigkeiten ausgenutzt werden können. [2, S. 346]

Lamine aus Faserverstärktem Kunststoff bieten auf eine recht einfache Art und Weise eine gute Möglichkeit Steifigkeiten und Festigkeiten gezielt einzustellen. Durch die bewusste Auswahl eines Fasertyps, bzw. einer Kombination von verschiedenen Fasertypen lassen sich die Längselastizitätsmodule einstellen. Bei CFK-Fasern werden häufig Aramidfasern hinzugefügt, um die Schlagzähigkeit zu erhöhen. Eine weitere Stellschraube ist der Faservolumenanteil in einer Schicht. Um hohe Steifigkeiten und Festigkeiten zu erreichen, sollte er maximal erhöht werden. Der Faseranteil ist allerdings nicht beliebig steigerbar. Die Grenze liegt aufgrund des Mindestabstands von Fasern zueinander bei  $\varphi = 0,6$ . Eine weitere wichtige Optimierungsmöglichkeit beim Laminatentwurf ist der Faserwinkel. Die Faserwinkel sollten dabei optimal auf die Belastungen ausgelegt sein. Hierbei ist eine Aufgabenteilung auf die unterschiedlichen Laminatschichten der unterschiedlichen anliegenden Belastungen denkbar. Auch die lokale Aufdickung von Laminaten ist ein probates Mittel, um lokale Spannungen zu verringern. [2, S. 632-639]

Zeigt die Festigkeitsanalyse des Laminats, dass ein Faserbruch das kritische Versagenskriterium darstellt, empfiehlt es sich die Fasermenge bzw. die Dicke der betroffenen Schicht zu erhöhen. Ist allerdings Zwischenfaserbruch das entscheidende Versagenskriterium, funktioniert dieser Ansatz nicht. In diesem Fall ist es effektiver Fasern in  $90^\circ$  Richtung zur betroffenen Schicht anzuordnen. In der Praxis wird dabei meist keine zusätzliche Schicht eingebracht, sondern der Faservolumenanteil oder die Dicke einer bereits vorhandenen, in etwa in die benötigte Richtung ausgerichtete Schicht, wird erhöht. [19, S. 84-85]

---

## **4 Randbedingungen für die Berechnung**

Um die Berechnung starten zu können, müssen zunächst die Randbedingungen definiert werden. Im ersten Schritt wird dazu die geometrische Form des Laufrads festgelegt. Die Wandstärke ergibt sich aus dem Laminataufbau, welcher aufgrund der zu erwartenden Belastungen festgelegt wird.

Die Materialeigenschaften des Laminats hängen von dem eingesetzten Harz, den Fasern sowie dessen Ausrichtung ab. Mit Hilfe der technischen Daten der einzelnen Komponenten können die Schichteigenschaften bestimmt werden. Für die Berechnung sind die Elastizitäts- und Schubmodule von Bedeutung.

Die auf das Laufrad wirkenden Kräfte werden durch Annahmen von Fahrer- und Fahrradgewicht bestimmt. Da die Berechnung nur in einer Ebene durchgeführt wird, werden keine Torsionsbelastungen berücksichtigt.

Ebenfalls keine Berücksichtigung findet der Einfluss von Temperatur, Feuchtigkeit und Eigenspannungen. Eigenspannungen können unbeabsichtigt bei der Herstellung entstehen. Temperatur und Feuchtigkeit sind Umwelteinflüsse, die beim Gebrauch auf das Laufrad wirken.

### **4.1 Geometrische Form und Laminataufbau des Laufrads**

Die Form des Laufrades ist an die bereits auf dem Markt befindlichen Laufräder angelehnt. Wie bereits der Titel der Arbeit verrät, wird das Laufrad mit fünf Speichen dargestellt. Die Speichen sind gleichmäßig um die Nabe angeordnet, sodass ein Winkel zwischen den einzelnen Speichen von  $72^\circ$  entsteht. Felge, Speichen und der Nabenbereich stellen dabei ein einziges zusammenhängendes Bauteil dar, welches vom Laminataufbau in allen Bereichen identisch ist. In Abbildung 18 ist die geometrische Form des Laufrades zu erkennen. Die Felgengeometrie ist so konzipiert, dass 29“-Reifen aufgezogen werden können und sowohl schlauchlose Reifen, als auch Reifen mit Schlauch passend sind.

---



Abbildung 19 Prinzipdarstellung des zu berechnenden 5-Speichen-Laufrads aus Faserverbund-kunststoff [Eigene Darstellung]

Da die Übergangsbereiche zwischen Speichen und Felge sowie Speichen und Nabe in der Rechnung nicht realitätsnah berücksichtigt werden können, wird auf eine weitere Detaillierung dieser Bereiche verzichtet. Aus diesem Grund fehlt auch das Loch in der Laufradmitte, welches zur Befestigung der Radnabe dient.

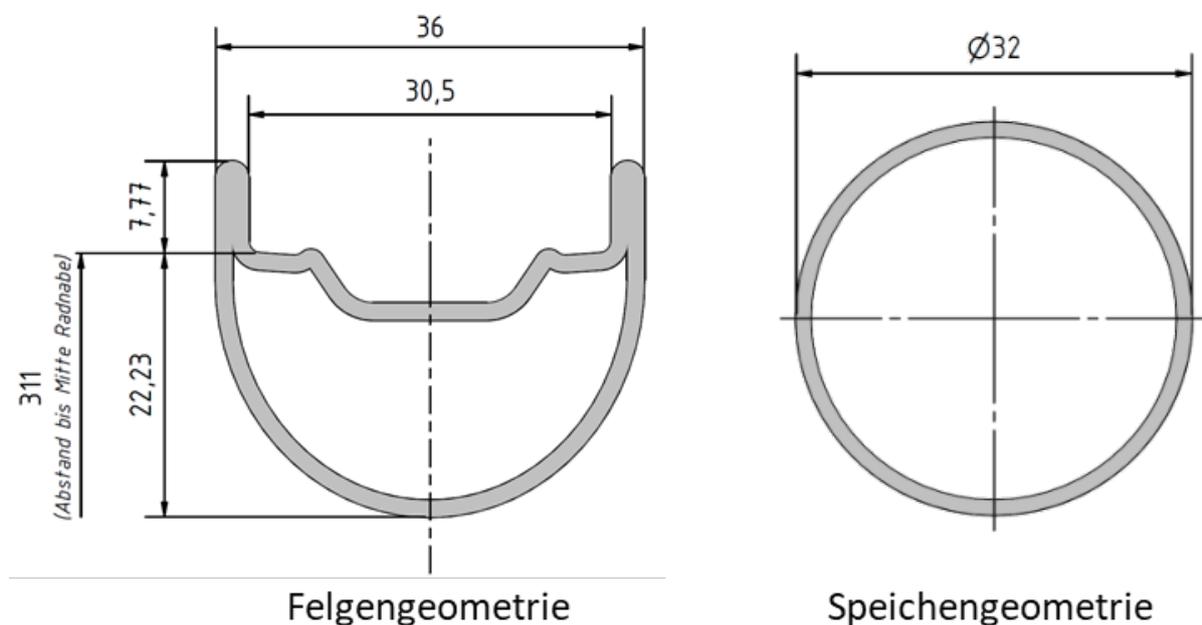


Abbildung 18 Darstellung der Felgen- und Speichen-Querschnittsgeometrie. [Eigene Darstellung]

Die Felgenreometrie wird im Bereich der Reifenaufnahme 1:1 von den zur Verfügung stehenden Angaben der Firma Xentis übernommen (KAPPA X 29). Dies gewährleistet eine erprobte Geometrie im Bereich der Reifenaufnahme. Der Teil der Felge, der zur Nabe zeigt, ist als

Ellipsenhälfte dargestellt. In Abbildung 19 werden die Querschnitts-Geometrie der Felge und Speiche mit den wichtigsten Abmaßen dargestellt.

Die Speichengeometrie ist ein Kreisring mit dem Außendurchmesser von  $\varnothing 32$  mm. Der Außendurchmesser von  $\varnothing 32$  mm ist somit etwas kleiner gewählt als die Felgenbreite. Die auf dem Markt befindlichen Laufräder aus Faserverbundkunststoff zeigen ebenfalls eine geringere Breite der Speiche gegenüber der Felge. Um die Rechnung möglichst einfach zu halten, wird auf eine Verjüngung der Speiche von Nabe zur Felge hin verzichtet. Ebenfalls wird auch keine tangentielle Anbindung der Felge an der Nabe realisiert.

Unabhängig von Felge oder Speiche beträgt die Wandstärke der Profile allgemein  $1,37$  mm. Die Wandstärke ergibt sich aus dem Laminataufbau der einzelnen Schichten. In Abbildung 20 wird der Laminataufbau mit allen Schichten schematisch dargestellt.

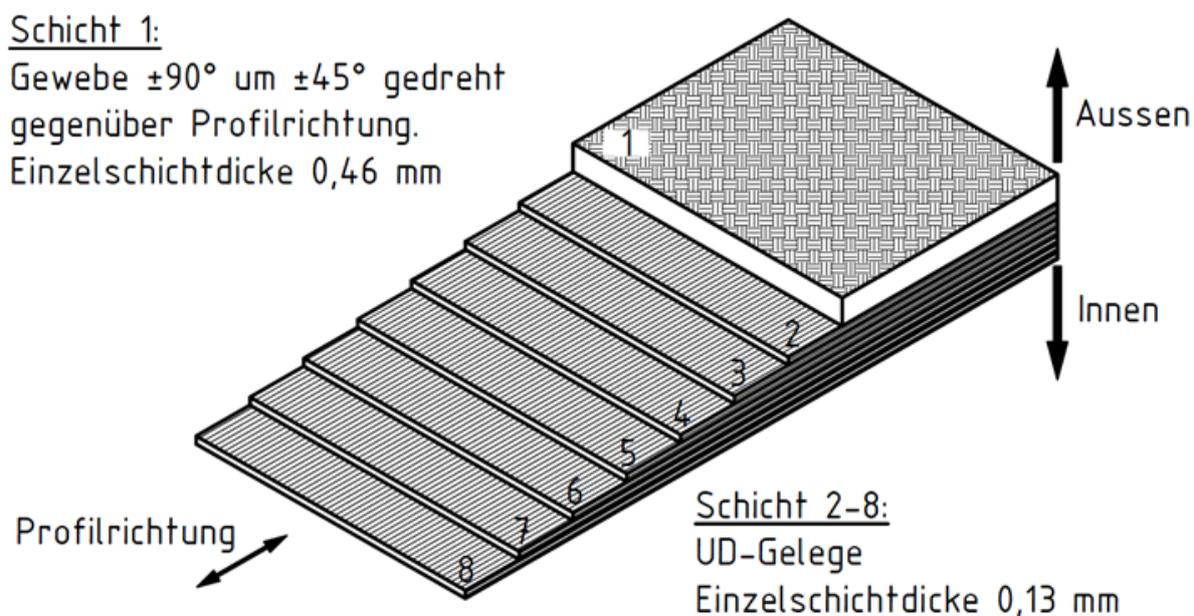


Abbildung 20 Schichtaufbau des Laminats. [Eigene Darstellung]

Der Aufbau ist so gestaltet, dass Außen am Profil eine Gewebeschicht aus  $\pm 90^\circ$  Fasern aufgebracht ist. Diese Schicht wird im  $45^\circ$ -Winkel zur Profilrichtung aufgebracht und dient zur Aufnahme von Torsionsmomenten infolge lateraler Kräfte. Die Dicke der Gewebeschicht beträgt  $0,46$  mm. Die Schichten 2 bis 7 bestehen aus UD-Gelegen und haben jeweils eine Dicke von  $0,13$  mm. Die Fasern der UD-Schicht sind so ausgerichtet, dass sie parallel zur Profilrichtung liegen. Die UD-Schichten dienen dazu Zugkräfte in Profilrichtung aufzunehmen.

## 4.2 Materialeigenschaften

Wie in 2.1.2 bereits beschrieben bieten Kohlenstofffasern die besten Eigenschaften was E-Modul und Zugfestigkeit betrifft. Zudem weisen Sie eine geringe Dichte auf. Der erhöhte Preis spielt bei dieser Anwendung eine eher untergeordnete Rolle. Aus diesen Gründen werden die Verstärkungsfasern für die UD-Schichten und die  $\pm 90^\circ$ -Gewebebeschicht einheitlich aus Kohlenstoff gewählt. Für die Auswahl der Fasern sowie auch des Matrixmaterials wird sich auf das Angebot der Firma „R&G Faserverbundwerkstoffe GmbH“ beschränkt.

Mit Hilfe der Herstellerangaben für Matrix und Faser werden, wie in Kapitel 3.4.1 beschrieben, die Einzelschicht-Eigenschaften bestimmt: Zunächst im lokalen Schicht-Koordinatensystem, dann im globalen Laminat-Koordinatensystem.

Wie bereits in 2.1.1 beschrieben soll die Matrix für den gesamten Faserverbund aus Epoxidharz bestehen. Laut Herstellerangaben wird das System aus Harz „L“ und Härter „CL“ bei Modell- und Sportgeräten eingesetzt. Es eignet sich optimal zum Handlaminieren da es bei Raumtemperatur aushärtet, zudem ist es hochtransparent. [20]

Tabelle 5 Herstellerangaben für das System Harz „L“ + Härter „CL“ [20]

Matrix	Harz L + Härter CL
Zugfestigkeit	83 N/mm <sup>2</sup>
Druckfestigkeit	111 N/mm <sup>2</sup>
E-Modul ( $E_m$ )	3.190 N/mm <sup>2</sup>

Aus den oben genannten Gründen soll das System Harz „L“ und Härter „CL“ für unsere Anwendung genutzt werden. Tabelle 5 listet die wichtigsten Eigenschaften des ausgehärteten Harzes auf. Das darin aufgeführte E-Modul hat einen Einfluss auf die Laminatschicht und geht in die folgenden Berechnungen mit ein. Die Angaben in Tabelle 5 werden vom Hersteller bereitgestellt.

### 4.2.1 Eigenschaften der Einzelschichten im Schicht-Koordinatensystem

Der Laminataufbau beinhaltet zwei unterschiedliche Schichten. Einmal die UD-Schicht, welche in mehreren Lagen verwendet wird und die  $\pm 45^\circ$ -Schicht, die nur außen einlagig aufgebracht wird. Dabei besteht die  $\pm 45^\circ$  Schicht aus einem  $\pm 90^\circ$ -Gewebe welches um  $45^\circ$  gedreht laminiert wird.

- **UD-Gelege**

Für die UD-Schicht wird ein Kohlenstofffaser-Gelege aus HT-Fasern der Firma „ZOLTEK“ gewählt. In Tabelle 6 werden die Herstellerinformationen bezüglich der Fasereigenschaften sowie wichtigste Kenngrößen bezüglich des Laminats aufgeführt.

Tabelle 6 Herstellerangaben des UD-Geleges „Kohlegelege ST 100 g/m<sup>2</sup>“ [21]

Faser	Faser	Panex® 35 50k	
	Zugfestigkeit	4.137	N/mm <sup>2</sup>
	E-Modul Zug ( $E_{f\parallel}$ )	242.000	N/mm <sup>2</sup>
	Flächengewicht	100	g/mm <sup>2</sup>
Laminat*	Laminatdicke	0,13	mm
	Laminatgewicht	179	g/m <sup>2</sup>
*bei 45 % Faservolumenanteil ( $\varphi^{\text{UD}}$ )			

Relevant für die Berechnung der Schichteigenschaften ist daraus das E-Modul in Faserrichtung  $E_{f\parallel}$  und der Faservolumenanteil  $\varphi^{\text{UD}}$ .

Mittels Formel (3.15) kann das E-Modul der UD-Schicht in Faserlängsrichtung bestimmt werden:

$$E_{\parallel}^{\text{UD}} = E_{f\parallel}^{\text{UD}} * \varphi^{\text{UD}} + E_m * (1 - \varphi^{\text{UD}})$$

$$E_{\parallel}^{\text{UD}} = 242.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} * 0,45 + 3.190 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} * (1 - 0,45) \quad (4.39)$$

$$E_{\parallel}^{\text{UD}} = 110.655 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Zur Bestimmung des Schubmoduls wird Formel (3.17) eingesetzt. Das Schubmodul der Matrix  $G_m$  sowie der Fasern  $G_{f\perp\parallel}$  wird nicht direkt vom Hersteller angegeben. Für das Schubmodul der Fasern wird deshalb auf einen Wert aus der Literatur zurückgegriffen:  $G_{f\perp\parallel}^{\text{UD}} = G_{f\perp\parallel}^{\#} = 50.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  [2, S. 41]. Das Schubmodul der Matrix kann über den Zusammenhang:

$$G_m = \frac{E_m}{2 * (1 + \nu_m)} \quad (4.40)$$

bestimmt werden [22, S. 191]. Da allerdings die Querkontraktion der Matrix  $\nu_m$  nicht vom Hersteller geliefert wird, muss auch hier ein Wert aus der Literatur entnommen werden:  $\nu_m = 0,37$  [2, S. 132]. Dies führt zunächst auf ein Schubmodul von:

$$G_m = \frac{3.190 \frac{N}{mm^2}}{2 * (1 + 0,37)} = 1.164 \frac{N}{mm^2} \tag{4.41}$$

Eingesetzt in Formel (3.17) ergibt dies ein Schubmodul für die UD-Schicht von:

$$G_{\perp\parallel}^{UD} = G_m * \frac{1 + 0,4 * \varphi^{0,5}}{(1 - \varphi)^{1,45} + \frac{G_m}{G_{f\perp\parallel}^{UD}} * \varphi}$$

$$G_{\perp\parallel}^{UD} = 1.164 \frac{N}{mm^2} * \frac{1 + 0,4 * 0,45^{0,5}}{(1 - 0,45)^{1,45} + \frac{1.164 \frac{N}{mm^2}}{50.000 \frac{N}{mm^2}} * 0,45} \tag{4.42}$$

$$G_{\perp\parallel}^{UD} = 3.427 \frac{N}{mm^2}$$

Das in diesem Abschnitt berechnete E-Modul in Faserlängsrichtung  $E_{\parallel}^{UD} = 110.655 \frac{N}{mm^2}$ , sowie das berechnete Schubmodul  $G_{\perp\parallel}^{UD} = 3.427 \frac{N}{mm^2}$  sind die relevanten Eigenschaften der UD-Schicht für die weitere Berechnung des Laufrads.

- **±90°-Gewebe**

Für die ±90°-Schicht wird ein Kohlenstofffaser-Gewebe aus HT-Fasern der Firma „DowAksa“ gewählt. Um eine gute Drapierbarkeit zu gewährleisten, wird ein Gewebe in Körperbindung genutzt. Gewebe in Atlasbindung, welche noch bessere Drapiereigenschaften besitzen, werden zum aktuellen Zeitpunkt nicht von „R&G Faserverbundwerkstoffe GmbH“ angeboten. Tabelle 7 stellt die vom Hersteller zur Verfügung gestellten Eigenschaften der Faser dar.

Tabelle 7 Herstellerangaben des ±90°-Gewebes „Kohlegewebe 285 g/m<sup>2</sup> (Körper 4/4)“ [23]

Faser	Faser	ASKACA™ A-38 200 tex (3k)
	Webart	Körper 4/4
	Zugfestigkeit	3.500 N/mm <sup>2</sup>
	E-Modul Zug ( $E_{f\parallel}^{\#}$ )	240.000 N/mm <sup>2</sup>
	Flächengewicht	285 g/mm <sup>2</sup>
Laminat*	Laminatdicke*	0,46 mm
	Laminatgewicht*	628 g/m <sup>2</sup>
*bei 35 % Faservolumenanteil ( $\varphi^{\#}$ )		

Wie auch bei der UD-Schicht, ist für die Berechnung der Eigenschaften der Gewebeschicht, das E-Modul in Faserrichtung  $E_{f\parallel}^{\#}$  und der Faservolumenanteil  $\varphi^{\#}$  Voraussetzung für die Berechnung.

Die Berechnung des G-Moduls des Gewebes erfolgt analog der der Fasern:

$$G_{\perp\parallel}^{\#} = G_m * \frac{1 + 0,4 * \varphi^{\#0,5}}{(1 - \varphi^{\#})^{1,45} + \frac{G_m}{G_{f\perp\parallel}^{\#}} * \varphi^{\#}}$$

$$G_{\perp\parallel}^{\#} = 1.164 \frac{N}{mm^2} * \frac{1 + 0,4 * 0,35^{0,5}}{(1 - 0,35)^{1,45} + \frac{1.164 \frac{N}{mm^2}}{50.000 \frac{N}{mm^2}} * 0,35} \quad (4.43)$$

$$G_{\perp\parallel}^{\#} = 2.645 \frac{N}{mm^2}$$

Auch das E-Modul in eine Faserrichtung erfolgt genauso wie bei der UD-Schicht:

$$E_{\parallel}^{\#} = E_{f\parallel}^{\#} * \varphi^{\#} + E_m * (1 - \varphi^{\#})$$

$$E_{\parallel}^{\#} = 240.000 \frac{N}{mm^2} * 0,35 + 3.190 \frac{N}{mm^2} * (1 - 0,35) \quad (4.44)$$

$$E_{\parallel}^{\#} = 86.074 \frac{N}{mm^2}$$

Des E-Modul quer zur Faserrichtung wird nach Formel (3.16) wie folgt berechnet:

$$E_{\perp}^{\#} = \frac{E_m}{1 - v_m^2} * \frac{1 + 0,85 * \varphi^{\#2}}{(1 - \varphi^{\#})^{1,25} + \frac{E_m}{(1 - v_m^2) * E_{f\perp}^{\#}} * \varphi^{\#}}$$

$$E_{\perp}^{\#} = \frac{3.190 \frac{N}{mm^2}}{1 - 0,37^2} * \frac{1 + 0,85 * 0,35^2}{(1 - 0,35)^{1,25} + \frac{3.190 \frac{N}{mm^2}}{(1 - 0,37^2) * 28.000 \frac{N}{mm^2}} * 0,35} \quad (4.45)$$

$$E_{\perp}^{\#} = 6.479 \frac{N}{mm^2}$$

Dabei muss für  $E_{f\perp}$  auf einen allgemeinen Wert aus der Literatur zurückgegriffen werden:  $E_{f\perp} = 28.000 \frac{N}{mm^2}$  [2, S. 41].

Da allerdings nicht die reinen E-Module, in und quer zur Faserrichtung von Interesse sind, müssen diese noch in die E-Module in die Kett- bzw. Schussrichtung überführt werden. Dazu wird der jeweilige Faservolumenanteil der beiden Richtungen mit den entsprechenden E-Modulen multipliziert und summiert:

$$E_K^\# = E_{\parallel}^\# * \varphi_{\text{Kett}} + E_{\perp}^\# * \varphi_{\text{Schuss}}$$

$$E_K^\# = 86.074 \frac{N}{mm^2} * 0,5 + 6.479 \frac{N}{mm^2} * 0,5 \quad (4.46)$$

$$E_K^\# = 46.277 \frac{N}{mm^2}$$

Da die Fasern im Gewebe  $\pm 90^\circ$  angeordnet sind und der jeweilige Faservolumenanteil in Kett- und Schussrichtung identisch ist, folgt daraus direkt, dass das E-Modul des Gewebes in Kett- und Schussrichtung identisch ist:  $E_K^\# = E_S^\#$ .

Die Querkontraktionen der Schicht können wieder über die Mischungsregel bestimmt werden. Aufgrund von der Tatsache, dass in Schuss- und Kettichtung die gleichen Anteile von Fasern liegen, führt dies direkt zur Querkontraktion in Schuss-Kett-  $v_{SK}^\#$  und Kett-Schuss-Richtung  $v_{KS}^\#$ .

$$v_{SK}^\# = v_{KS}^\# = v_{f\perp\parallel} * \varphi + v_m * (1 - \varphi)$$

$$v_{SK}^\# = v_{KS}^\# = 0,23 * 0,35 + 0,37 * (1 - 0,35) \quad (4.47)$$

$$v_{SK}^\# = v_{KS}^\# = 0,321$$

Für  $v_{f\perp\parallel} = 0,23$  musste sich ebenfalls der Literatur bedient werden [2, S. 41].

Das in diesem Abschnitt berechnete E-Modul in Kett- und Schussrichtung  $E_K^\# = E_S^\# = 46.277 \frac{N}{mm^2}$ , sowie das berechnete Schubmodul  $G_{\perp\parallel}^\# = 2.645 \frac{N}{mm^2}$  sind wie bei der UD-Schicht die Ausgangsgrößen für die Laufradberechnung. Da die Gewebeschicht um  $45^\circ$  gegenüber dem globalen Koordinatensystem gedreht ist wird im folgenden Abschnitt noch eine Transformation durchgeführt. Für diese Transformation ist die zuletzt berechnete Querkontraktion  $v_{SK}^\# = v_{KS}^\# = 0,321$  von Bedeutung.

## 4.2.2 Eigenschaften der Einzelschichten im Laminat-Koordinatensystem

Für die UD-Schichten ist das Laminat-Koordinatensystem deckungsgleich mit dem Schicht-Koordinatensystem, somit können die Werte 1:1 übernommen werden:

$$E_x^{\text{UD}} = E_{\parallel}^{\text{UD}} = 110.655 \frac{N}{\text{mm}^2} \quad (4.48)$$

$$G_{yx}^{\text{UD}} = G_{\perp\parallel}^{\text{UD}} = 3.427 \frac{N}{\text{mm}^2} \quad (4.49)$$

Beim Gewebe liegt eine Drehung um  $45^\circ$  vor, sodass mittels Formeln (3.20) bis (3.25) eine Umrechnung vom Schicht- Koordinatensystem in das Laminat-Koordinatensystem durchgeführt werden muss. Die ausführliche Berechnung befindet sich im Anhang B.1.

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.722 & 31.432 & 0 \\ 31.432 & 36.722 & 0 \\ 0 & 0 & 17.516 \end{bmatrix} * \frac{N}{\text{mm}^2} \quad (4.50)$$

Um die E-Module in X- und Y-Richtung ohne Querkontraktionsbehinderung bestimmen zu können, wird folgendes lineare Gleichungssystem gelöst:

$$\begin{bmatrix} \frac{E_x^{\#}}{1 - \nu_{yx}^{\#} * \nu_{xy}^{\#}} & \frac{\nu_{xy}^{\#} * E_x^{\#}}{1 - \nu_{yx}^{\#} * \nu_{xy}^{\#}} & 0 \\ \frac{\nu_{yx}^{\#} * E_y^{\#}}{1 - \nu_{yx}^{\#} * \nu_{xy}^{\#}} & \frac{E_y^{\#}}{1 - \nu_{yx}^{\#} * \nu_{xy}^{\#}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{yx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36.722 & 31.432 & 0 \\ 31.432 & 36.722 & 0 \\ 0 & 0 & 17.516 \end{bmatrix} * \frac{N}{\text{mm}^2} \quad (4.51)$$

Dafür werden zunächst die beiden folgenden Gleichungen nach  $E_x^{\#}$  umgeformt und anschließend gleichgesetzt.

$$\frac{E_x^{\#}}{1 - \nu_{yx}^{\#} * \nu_{xy}^{\#}} = 36.722 \frac{N}{\text{mm}^2} \quad \left| \quad \frac{\nu_{xy}^{\#} * E_x^{\#}}{1 - \nu_{yx}^{\#} * \nu_{xy}^{\#}} = 31.432 \frac{N}{\text{mm}^2} \right. \quad (4.52)$$

$$E_x^{\#} = 36.722 \frac{N}{\text{mm}^2} * (1 - \nu_{yx}^{\#} * \nu_{xy}^{\#}) \quad \left| \quad E_x^{\#} = 31.432 \frac{N}{\text{mm}^2} * \frac{(1 - \nu_{yx}^{\#} * \nu_{xy}^{\#})}{\nu_{xy}^{\#}} \right.$$

$$36.722 \frac{N}{\text{mm}^2} * (1 - \nu_{yx}^{\#} * \nu_{xy}^{\#}) = 31.432 \frac{N}{\text{mm}^2} * \frac{(1 - \nu_{yx}^{\#} * \nu_{xy}^{\#})}{\nu_{xy}^{\#}} \quad (4.53)$$

$$\nu_{xy}^{\#} = 0,856$$

Aufgrund der Symmetrie ist  $\nu_{xy}^{\#} = \nu_{yx}^{\#} = 0,856$ . Durch einsetzen in

$$\frac{E_x^\#}{1 - \nu_{yx}^\# * \nu_{xy}^\#} = 36.722 \frac{N}{mm^2}$$

$$E_x^\# = 36.722 \frac{N}{mm^2} * (1 - 0,856^2) \quad (4.54)$$

$$E_x^\# = 9.814 \frac{N}{mm^2}$$

kann direkt das E-Modul in X-Richtung  $E_x^\#$  bestimmt werden. Auch hier besteht aufgrund der Symmetrie der Zusammenhang zwischen X- und Y-Richtung:  $E_x^\# = E_y^\#$ .

Tabelle 8 E-Modul und Schubmodul der Einzelschichten im Laminat-Koordinatensystem

E-Modul in X-Richtung	UD-Schicht	$E_x^{UD}$	110.655	N/mm <sup>2</sup>
	$\pm 45^\circ$ -Schicht	$E_x^\#$	9.814	N/mm <sup>2</sup>
Schubmodul	UD-Schicht	$G_{yx}^{UD}$	3.427	N/mm <sup>2</sup>
	$\pm 45^\circ$ -Schicht	$G_{yx}^\#$	17.516	N/mm <sup>2</sup>

Zur besseren Übersicht werden in Tabelle 8 die zuvor berechneten E- und G-Module von UD- und Gewebeschicht im globalen Laminat-Koordinatensystem aufgelistet. Nur für die Gewebeschicht war aufgrund der  $45^\circ$  Drehung, gegenüber dem globalen Laminat-Koordinatensystem, eine Transformation der Module notwendig. Die E- und G-Module im globalen Laminat-Koordinatensystem sind Grundlage für die Berechnung der Dehnungen und Spannungen im Laufrad.

### 4.3 Äußere Kräfte am Laufrad

Wie in 2.2.3 beschrieben gibt es unterschiedliche äußere Belastungen am Laufrad. Da die in dieser Arbeit durchgeführte Berechnung das Laufrad nur in der Ebene betrachtet, müssen die lateralen Kräfte vernachlässigt werden.

Die relevanten Kräfte werden in radiale, tangentiale und stoßartige Belastungen aufgeteilt. Die Kräfte für die weiteren Berechnungen folgen aus radialen Belastungen und den auf die Felge tangential wirkenden Bremskräften. Radiale und tangentiale Kräfte werden als statisch angenommen. Stoßartige Belastungen auf das Laufrad, welche einen dynamischen Charakter aufweisen, werden im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter berücksichtigt.

Als Bremssystem wird eine Nabenbremse in Form einer Scheibenbremse vorgesehen. Dieses System ist bei hochwertigen Mountainbikes gängiger Standard.

#### 4.3.1 Radiale Belastung

Für die radialen Kräfte am Laufrad gibt es unterschiedliche Ursachen mit verschieden starken Auswirkungen. Das Systemgewicht aus Fahrer, Fahrrad und Gepäck ist dabei der entscheidende Einflussfaktor. [6, S. 157] und [6, S. 465-466]

Eine zu betrachtende Ursache ist die Bremsung. Die größte Kraft tritt auf das Vorderrad auf, wenn die Bremskraft des Vorderrads so hoch ist, dass sich das Fahrrad überschlagen würde (siehe Abbildung 21).

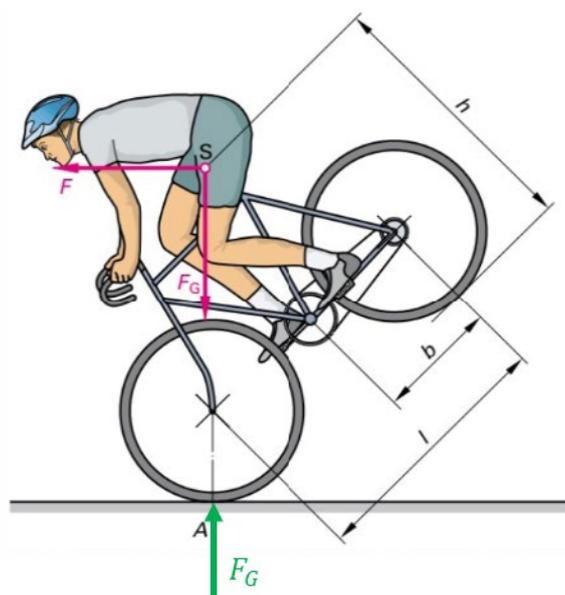


Abbildung 21 : Die radiale Kraft auf das Vorderrad ergibt sich aus der Gesamtsystemgewichtskraft (Fahrer, Fahrrad und Gepäck). [6, S. 466]

Die Gesamtmasse lastet somit komplett auf dem Vorderrad und die maximale radiale Kraft ergibt sich aus der Gesamtsystemgewichtskraft. [6, S. 465-466]

Laut Angaben von „XeNTiS“ sind ihre Laufräder für ein Masse von 140 kg (Fahrer und Gepäck) ausgelegt [10]. Da diese Laufräder auch für Elektro-Mountainbikes eingesetzt werden können, kann von einer Gesamtmasse von bis zu ca. 165 kg ausgegangen werden. Dies führt zu einer Gesamtsystemgewichtskraft  $F_G$  von 1650 N.

$$F_G = (m_{\text{Fahrer und Gepäck}} + m_{\text{Fahrrad}}) * g$$

$$F_G = (140 \text{ kg} + 25 \text{ kg}) * 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (4.55)$$

$$F_G \approx 1650 \text{ N}$$

### 4.3.2 Tangentiale Belastung

Eine Vorderradbremmung führt neben der Erhöhung der radialen Kräfte auf das Laufrad insbesondere auch zu tangentialen Kräften an der Felge. Diese Kräfte werden auch als tordierende Kräfte bezeichnet, da sie das Laufrad bezüglich Nabe tordieren. Die maximalen tangentialen Kräfte treten auf, sobald das Hinterrad den Bodenkontakt verliert. Dies ist der Fall, wenn das Moment aus  $F * h$  größer wird als das Moment aus  $F_G * (l - h)$  (siehe Abbildung 22). Die Werte  $l = 1,1 \text{ m}$ ,  $b = 0,45 \text{ m}$  und  $h = 1,2 \text{ m}$  konnten aus dem Fachkundebuch Fahrradtechnik entnommen werden. Sicherlich gibt es je nach Fahrrad, Fahrer und Gepäckbeladung Abweichungen. Diese sollen für die Grobauslegung jedoch vernachlässigt werden. [6, S. 465-466] [6, S. 533]

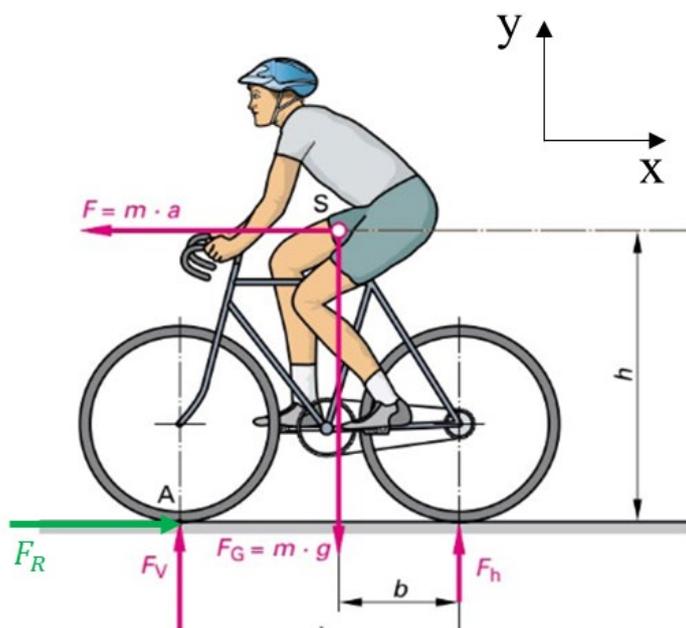


Abbildung 22 : Berechnung der auf das Vorderrad wirkenden Bremskraft  $F_R$ . [Darstellung in Anlehnung an [6, S. 533]]

Die Gleichgewichtsbedingungen um den Drehpunkt „A“ ergeben eine Bremsverzögerung von  $a = 5,31 \frac{m}{s^2}$ . Die Masse des Systems spielt dabei keine Rolle. [6, S. 533]

$$\sum M_A = 0 = m * a * h - m * g * (l - b) + F_h * l \quad (4.56)$$

Da der hintere Reifen keinen Kontakt mehr mit dem Boden hat ist  $F_h = 0$ .

$$m * a * h = m * g * (l - b)$$

$$a = \frac{g * (l - b)}{h} = \frac{9,81 \frac{m}{s^2} * (1,1 m - 0,45 m)}{1,2 m} \quad (4.57)$$

$$a = 5,31 \frac{m}{s^2}$$

Mit Hilfe der Bremsverzögerung  $a$  und der Gesamtmasse lässt sich die Bremskraft  $F_R$  berechnen.

$$F_R = (m_{\text{Fahrer und Gepäck}} + m_{\text{Fahrrad}}) * a \quad (4.58)$$

$$F_R = 165 kg * 5,31 \frac{m}{s^2} = 876,15 N \approx 880 N$$

Die maximal zu erreichende Bremskraft  $F_R$  ist abhängig von der Normalkraft, in diesem Fall  $F_G$  und dem Haftreibungskoeffizient  $\mu$ . Die Normalkraft aus Gesamtmasse und Erdbeschleunigung sind bekannt. Der benötigte Haftreibungskoeffizient muss mit dem real vorhandenen Haftreibungskoeffizienten verglichen werden. Er berechnet sich wie folgt. [6, S. 533]

$$F_R = F_G * \mu \quad (4.59)$$

$$\mu = \frac{F_R}{F_G} = \frac{816,15 N}{1650 N} = 0,49$$

Bei Geländefahrrädern werden auf Betonstraßen und guten Feldwegen Haftreibungszahlen von über 0,7 erreicht. Da der benötigte Haftreibungskoeffizient  $\mu$  bei 0,49 liegt, kann es grundsätzlich zum Überschlag kommen und  $F_R$  kann wie bereits berechnet vollständig erreicht werden. [6, S. 466]

Um ausreichende Sicherheit zu gewähren, werden zusätzlich beide Belastungen mit einem Sicherheitsfaktor von 1,5 multipliziert.

### 4.3.3 Stoßbelastung

Die in 4.3.1 gezeigten radialen Kräfte zeigen lediglich Kräfte bei ebener Fahrbahn. Da gerade Mountainbikes speziell für das Gelände konzipiert werden, ist mit erheblichen Stoßbelastungen aufgrund unebenen Untergrunds zu rechnen. Für ungefederte Mountainbike-Fahrradrahmen werden aufgrund von Stoßbelastungen Kräfte von bis zu 9000  $N$  angenommen. Diese Kraft wird über das Hinterrad in den Rahmen eingeleitet. Die Kraft, die über das weniger belastete Vorderrad übertragen wird, liegt bei bis zu 3500  $N$ . [6, S. 158]

Die radiale Belastung aufgrund von Stößen ist fast sechs Mal so hoch wie die aufgrund von einer Bremsung. Da die Stoßbelastungen allerdings nur kurzzeitig auftreten, werden sie im weiteren Verlauf der Rechnung nicht berücksichtigt.

## 5 Berechnungsdurchführung

In Abbildung 23 wird der Ablauf zur Berechnung der Dehnungen und Spannungen im gesamten Laufrad grob dargestellt. Zur Vorbereitung gehört, alle Randbedingungen zu definieren und das System von einem statisch unbestimmten in ein statisch bestimmtes zu überführen. Des Weiteren müssen die Momenten- und Kraftverläufe in Folge äußerer und virtueller Kräfte bestimmt werden.

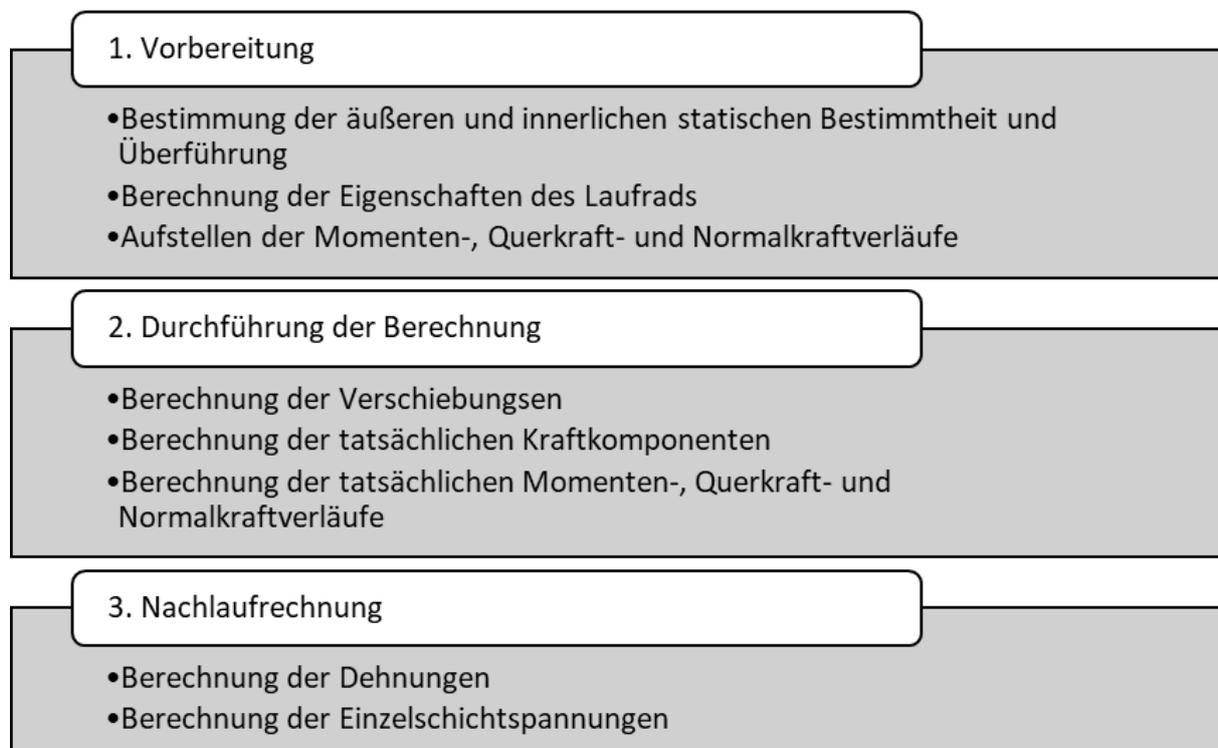


Abbildung 23 Übersicht über den Berechnungsablauf. [Eigene Darstellung]

Die Durchführung der Berechnung erfolgt durch das Computer Algebra Programm „Maxima“ [24]. „wxMaxima“ stellt dabei die grafische Benutzeroberfläche dar. Dabei werden zunächst die Verschiebungen und daraus die tatsächlichen Kraftkomponenten berechnet. Im Anschluss werden die aus den tatsächlichen Kraftkomponenten resultierenden tatsächlichen Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe ermittelt. Die tatsächlichen Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe zeigen die inneren Beanspruchungen in allen Teilen des Laufrads in Folge der äußeren Belastung an.

In der Nachlaufrechnung werden die Dehnungen über dem gesamten Laminat berechnet. Daraus können die Spannungen in den einzelnen Schichten ermittelt werden.

Um die Ergebnisse sowie Zwischenergebnisse zu überprüfen, werden verschiedene Plausibilitätsprüfungen aufgezeigt. Damit sollen grundsätzliche Berechnungsfehler ausgeschlossen werden.

Abschließend werden unterschiedliche Varianten dargestellt, die mit dem zuvor beschriebenen Berechnungsablauf durchgeführt werden.

## 5.1 Berechnung mit Hilfe von Maxima

Mit Hilfe des Computer Algebra Programms „Maxima“ wird die Berechnung unterstützt. Es bietet die Möglichkeit aufwendige Rechnungen zu strukturieren und automatisch ablaufen zu lassen. Zudem können Funktionen graphisch dargestellt werden. „wxMaxima“ stellt die grafische Benutzeroberfläche von Maxima dar. „Maxima“ selbst führt die Berechnungen im Hintergrund aus. [25]

Die Eingabe in Maxima erfolgt zeilenweise in Textform. Einzelne Variablen oder Funktionen werden als Text bzw. Zahlen eingegeben und auch so im Fenster dargestellt. Sind alle Variablen und die notwendigen Berechnungsschritte in Maxima definiert, kann die Berechnung durchgeführt werden. Bei der Berechnung erfolgt eine zeilenweise Berechnung von oben nach unten. Die entsprechenden Ergebnisse werden direkt nach dem jeweiligen Berechnungsschritt ausgegeben. Durch die Gliederungsfunktion in einzelne Kapitel und Unterkapitel, sowie der Möglichkeit Hinweistexte einzubringen, kann der Berechnungsablauf sinnvoll und übersichtlich strukturiert werden.

Da Maxima nicht mit Einheiten umgehen kann, müssen alle eingegebenen Werte auf einheitliche Einheiten umgerechnet werden. Im Falle der hier durchgeführten Berechnung werden alle Längenangaben im Berechnungsprogramm in Meter angegeben und alle Kräfte in Newton.

---

## 5.2 Vorbereitung

Da das Laufrad ein innerlich statisch unbestimmtes System ist wird, für die Berechnung das Prinzip der virtuellen Kräfte genutzt. Um dieses anwenden zu können, ist in der Vorbereitung die Überführung des innerlich statisch unbestimmten Systems, in ein innerlich statisch bestimmtes System notwendig.

Im zweiten Abschnitt der Vorbereitung werden Eigenschaften wie Gesamt-E-Modul, ideale Faser und Flächenträgheitsmoment der Speiche und Felge bestimmt. Diese setzen sich aus den geometrischen Eigenschaften der Felge- und Speichen-Profile sowie der Materialeigenschaften der Schichten zusammen.

Durch das Aufstellen der Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe über die einzelnen Laufradbereiche, werden die Voraussetzungen für die weitere Berechnung geschaffen.

### 5.2.1 Bestimmung der äußeren und innerlichen statischen Bestimmtheit

Um die Berechnung des Laufrads zu starten, muss dieses zunächst aus dem Gesamtsystem Fahrrad und Umwelt herausgelöst werden. Dazu wird, wie in Abbildung 24 links, das Laufrad aus der Umgebung gelöst und die Schnittstellen mit den entsprechenden Lagerungen ersetzt. Die Stelle der Radnabe (Übergang zum Fahrrad) wird durch ein Loslager dargestellt. Die Übergangsstelle Laufrad-Reifen-Untergrund wird mit einem Festlager beschrieben. Diese beiden

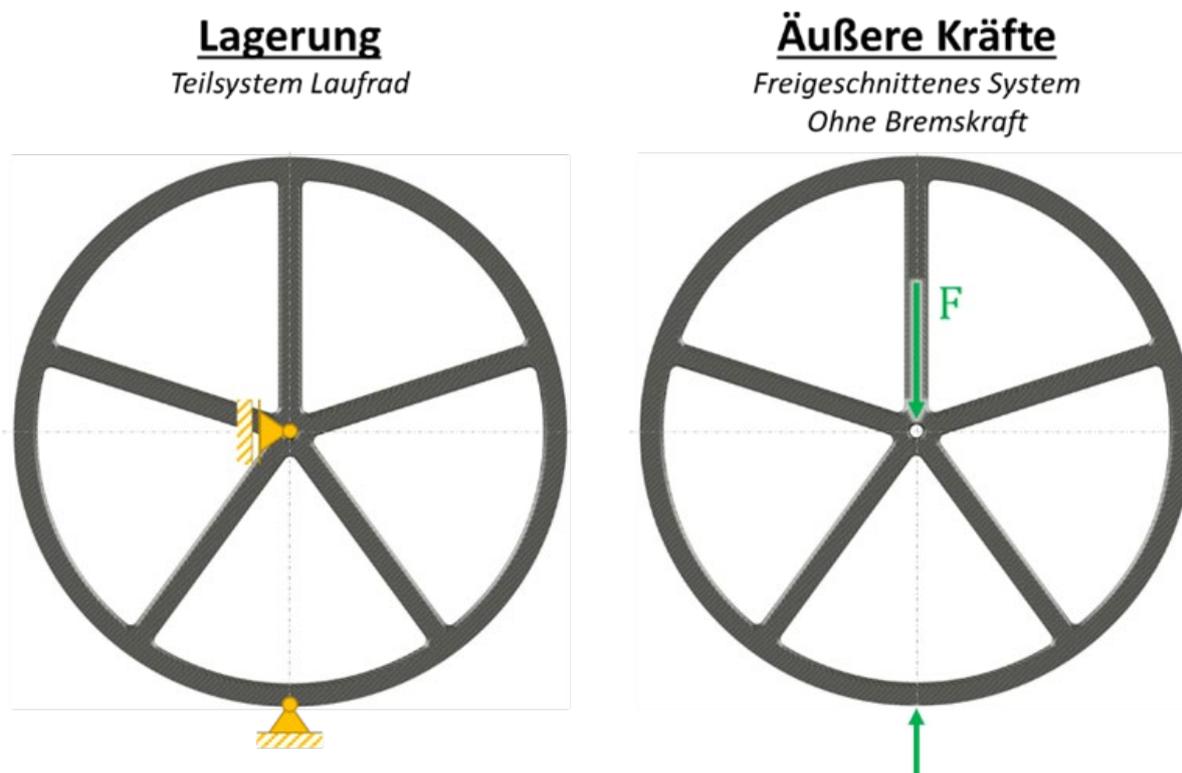


Abbildung 24 links: Teilsystem Laufrad mit Los- und Festlager, rechts: Äußere Kräfte am freigeschnittenen System ohne Bremskraft. [Eigene Darstellung]

Lagerungen spiegeln die realen Freiheitsgrade des Laufrads wider. Bei dieser einfachen Lagerung lässt sich die äußerlich statische Bestimmtheit leicht erkennen. Mit Hilfe der Formel  $f = 3 - a_{ges}$  aus Kapitel 3.2 kann dies bestätigt werden. Das Festlager ist 2-wertig und das Loslager 1-wertig. Somit folgt  $f = 3 - (2 + 1) = 0$ . Das System ist somit äußerlich statisch bestimmt.

Zur Bestimmung der inneren statischen Bestimmtheit werden, wie in Kapitel 3.2 beschrieben, so viele Schnitte eingeführt bis das Laufrad eine innerliche statische Bestimmtheit erreicht. In Abbildung 25 sind die eingebrachten Schnitte zu erkennen. Die Schnitte wurden ausschließlich in der Felge platziert und so angeordnet, dass sich eine symmetrische Verteilung ergibt. Jeweils ein Schnitt ist oben links und oben rechts neben der mittigen Speiche 1 platziert. Ein Schnitt ist mittig im unteren Felgenabschnitt 8-9 und die beiden letzten sind jeweils am oberen Übergang Speiche-Felge der verbleibenden Felgenabschnitte 7 und 10. Aus der Anzahl der eingebrachten Schnitte lässt sich die statische Unbestimmtheit des ungeschnittenen Laufrads ablesen. Da jeder Schnitt 3-wertig ist, ergibt sich eine 15-fach innerlich statische Unbestimmtheit des Laufrads.

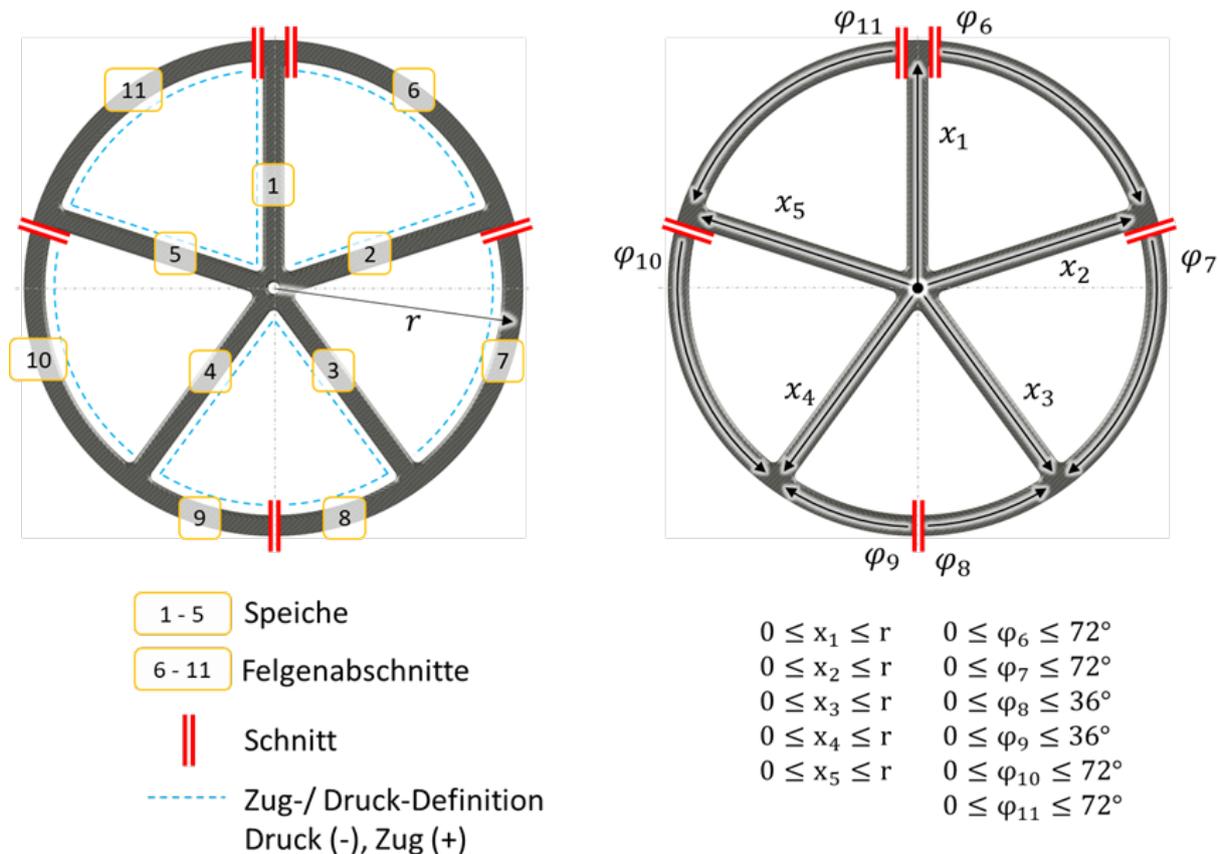


Abbildung 25 Links: Festlegung und Beschreibung der Laufradabschnitte mit Schnitten für die innerlich statische Bestimmtheit und Definition der Zug-/ Druck-Beanspruchungen durch eine gestrichelte Bezugsfaser. Rechts: Beschreibung der Speichen und Felgenabschnitte durch Variable. [Eigene Darstellung]

Neben den Schnitten werden in Abbildung 25 weitere Festlegungen getroffen, die für die weitere Berechnung unerlässlich sind. Die Felgenabschnitte bzw. Speichen werden von 1 bis 11 nummeriert; Speichen von 1 bis 5 und die Felgenabschnitte von 6 bis 11. Dabei erstrecken sich die Speichen von der Nabe aus gesehen jeweils über die Länge  $0 \leq x_n \leq r$ . Der Index  $n$  bezieht sich auf die dazugehörige Felge. Die Variable  $r$  stellt den Radius der ideellen Faser dar. Die ideelle Faser ergibt sich aus den Eigenschaften des Laminataufbaus und der Felgengeometrie. Die Berechnung des entsprechenden Wertes wird in Kapitel 5.2.2 beschrieben. Die Felgenabschnitte laufen alle von einem Schnitt zur nächsten Speichen-Felgenverbindung. Dabei überstreichen alle Felgenabschnitte einen Winkel von  $72^\circ$ , außer die beiden Felgenabschnitte 8 und 9. Da dieser Felgenabschnitt in der Mitte geteilt ist, überstreichen sie lediglich einen Winkel von  $36^\circ$ . Mit der Angabe von  $x_n$  bzw.  $\varphi_n$  lässt sich somit immer eine eindeutige Position im Laufrad beschreiben.

## 5.2.2 Berechnung der Eigenschaften des Laufrads

In Kapitel 4.1 und 4.2 wurden bereits der Laminataufbau, die Einzel-Schicht-eigenschaften und die Geometrie der Felge und Speiche beschrieben. Folgende felgen- bzw. speichenbezogene Merkmale können damit nun berechnet werden: Ideelle Faser, Biegesteifigkeit, Dehnsteifigkeit, E-Modul und G-Modul. Dazu werden noch die Flächenträgheitsmomente, die Querschnittsflächen sowie die Schwerpunkte der einzelnen Schichten benötigt.

Da das Laminat aus sieben einzelnen, aufeinanderfolgenden UD-Schichten gleicher Ausrichtung besteht, können die UD-Schichten für die weitere Berechnung zu einer Schicht zusammengefasst werden. Zur Unterscheidung wird im Folgenden die Bezeichnung „Gesamt-UD-Schicht“ für die zusammengefassten UD-Schichten benutzt.

Tabelle 9 Fläche, Flächenschwerpunkt und Flächenträgheitsmoment der Gesamt-UD-Schicht und der Gewebeschicht

Geometrie	Schicht	Flächenschwerpunkt*	Fläche	Flächenträgheitsmoment**
Felge	Gesamt UD	304,54 mm	115,80 mm <sup>2</sup>	8.278,74 mm <sup>4</sup>
	Gewebe	304,78 mm	60,25 mm <sup>2</sup>	4.941,75 mm <sup>4</sup>
Speiche	Gesamt UD	0,00 mm	86,25 mm <sup>2</sup>	9.822,50 mm <sup>4</sup>
	Gewebe	0,00 mm	45,58 mm <sup>2</sup>	5.668,85 mm <sup>4</sup>

\* Der Flächenschwerpunkt bezieht sich auf die Achse des gesamten Laufrads (Radnabe)

\*\* Das Flächenträgheitsmoment bezieht sich auf eine parallele zur Laufradachse, welche durch den jeweiligen Flächenschwerpunkt verläuft.

Die Ermittlung des Flächenträgheitsmoments und des Flächenschwerpunkts der Gesamt-UD-Schicht sowie der Gewebeschicht, wird für die Felge aufgrund der komplexen Geometrie mittels CAD-Programm durchgeführt. Dazu wird die Geometrie im CAD-Programm Autodesk Inventor [26] konstruiert und mittels Numerik ausgewertet. Da die Speiche lediglich aus einem Kreisring besteht, kann hier der analytische Ansatz gewählt werden. In Tabelle 9 sind die so ermittelten Werte für die Felge und die Speiche aufgelistet.

Tabelle 10 : Berechnete Eigenschaften des Gesamtquerschnitts der Felge und Speiche unter Berücksichtigung der Geometrie und des Laminataufbaus.

Eigenschaft	Formel	Felge	Speiche	Einheit
Ideelle Faser	$z_{ges} = \frac{\sum E_i * z_{mi} * A_i}{\sum E_i * A_i}$	304,55	0,00	mm
Fläche	$A_{ges} = \sum A_i$	176,06	131,83	mm <sup>2</sup>
E-Modul	$E_{ges} = \frac{\sum E_i * A_i}{\sum A_i}$	76.144	75.790	$\frac{N}{mm^2}$
G-Modul	$G_{ges} = \frac{\sum G_i * A_i}{\sum A_i}$	8.248,8	8.298,1	$\frac{N}{mm^2}$
Dehnsteifigkeit	$(EA)_{ges} = \sum E_i A_i$	$1,34 * 10^7$	$9,99 * 10^6$	N
Biegesteifigkeit	$(EI)_{ges} = \sum E_i I_i$	$9,65 * 10^8$	$1,14 * 10^9$	N * mm <sup>2</sup>
Flächen-trägheitsmoment	$(I)_{ges} = \frac{(EI)_{ges}}{(E)_{ges}}$	12.688	15.075	mm <sup>4</sup>

Durch Implementierung der Formeln (3.28) bis (3.32) in Maxima, können automatisch die ideale Faser, das E- und G-Modul, die Biege- und Dehnsteifigkeiten und das Flächenträgheitsmoment des gesamten Speichen- und Felgenquerschnitts berechnet werden. Die Formeln sowie die daraus berechneten Ergebnisse sind in Tabelle 10 aufgelistet. Die jeweilige Gesamtflächenquerschnittsfläche berechnet sich durch Addition der beiden Einzelflächen von Gesamt-UD-Schicht und Gewebeschicht. Beim Flächenträgheitsmoment muss beachtet werden, dass die Einzelschicht-Flächenträgheitsmomente auf die jeweiligen Flächenschwerpunkte bezogen sind. Mit Hilfe des „Satz von Steiner“ [15, S. 223] müssen diese auf die ideale Faser umgerechnet werden.

### 5.2.3 Aufstellen der Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe

Ein weiterer Schritt ist das Aufstellen der Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe der einzelnen Systeme. Wie bereits in Absatz 3.3.2 beschrieben, stellt dabei das „0-System“ das innerlich statisch bestimmte System mit den äußerlich angreifenden Lasten dar. Im Fall der rein radialen Belastung wird die angreifende Last an der Nabe angebracht und die Gegenkraft am unteren Schnitt in zwei gleich große Kräfte aufgeteilt. Abbildung 27 zeigt oben links die angreifende Kraft „F“ und die geteilte Gegenkraft, sowie die dadurch entstehenden Momentenverläufe *M03\_00*, *M04\_00*, *M08\_00* und *M09\_00*. Um das Vorzeichen der Momentenverläufe

jeweils eindeutig zu bestimmen, wird auf die in Abbildung 25 festgelegte Definition zurückgegriffen. „Zieht“ ein Moment an der gestrichelten Bezugsfaser ist das Vorzeichen positiv, wird die gestrichelte Bezugsfaser auf Druck „beansprucht“ ist das Vorzeichen negativ. Die Bezugsfaser wurde in Abbildung 25 auf Seite 57 definiert.

Um die Bezeichnung der Kraft- und Momentenverläufe klar zu regeln, wird die in Abbildung 26 dargestellte Nomenklatur festgelegt. Die Farben in der Abbildung dienen lediglich der besseren Darstellung.

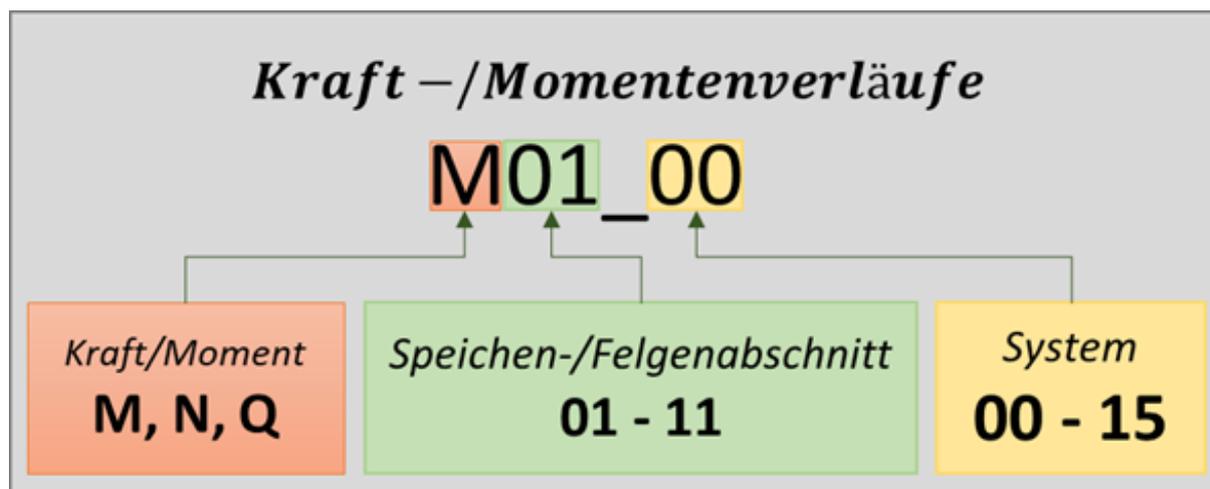


Abbildung 26 Nomenklatur der Bezeichnung von Kraft- und Momentenverläufen. [Eigene Darstellung]

Durch die eingeführten Schnitte in Absatz 5.2.1 wurde das Gesamtsystem Laufrad, welches zunächst innerlich statisch unbestimmt ist, in ein innerlich statisch bestimmtes System überführt. An den durch die Schnitte entstehenden offenen Enden werden die virtuellen Kräfte angetragen. Durch jede angetragene virtuelle Kraft entsteht ein neues System. Da ein Schnitt 3-wertig ist und 5 Schnitte angebracht werden, kommen zum „0-System“, 15 weitere System hinzu. Diese werden mit „1-System“ bis „15-System“ bezeichnet.

Bei den angetragenen virtuellen Kräften handelt es sich je Schnitt jeweils um die Normalkraft, die Querkraft und das Moment. Die Normalkraft wirkt senkrecht auf die Schnittfläche, die Querkraft hingegen wirkt in Schnittrichtung. Alle Belastungen liegen dabei in einer Ebene und werden mit einer dimensionslosen „1“ definiert. Zur übersichtlichen Darstellung werden diese Kräfte mit  $X_n$  dargestellt wobei das tiefgestellte  $n$  dabei für das jeweilig bezogene System steht. Abbildung 27 stellt die angreifenden virtuellen Kräfte  $X_1, X_2$  und  $X_3$  für das „1-“, „2-“ und „3-System“ dar. Zudem werden die dadurch entstehenden Momentenverläufe im Laufrad

qualitativ dargestellt. Im Anhang unter B.2 sind ausführlich alle Momentenverläufe bildlich und als Funktion dargestellt.

In Folge der äußeren Belastung sowie der virtuellen Kräfte entstehen neben den Momentenverläufen ebenfalls, Normalkraft und Querkraftverläufe über den Speichen und Felgenabschnitten. Anzumerken ist hier abermals die richtige Vorzeichendefinition. Beim Normalkraftverlauf steht ein negatives Vorzeichen für eine Druckbelastung, ein positives für eine Zugbelastung. Bei den Vorzeichen der Querkraftverläufe ist sich strikt an die Definition aus Abschnitt

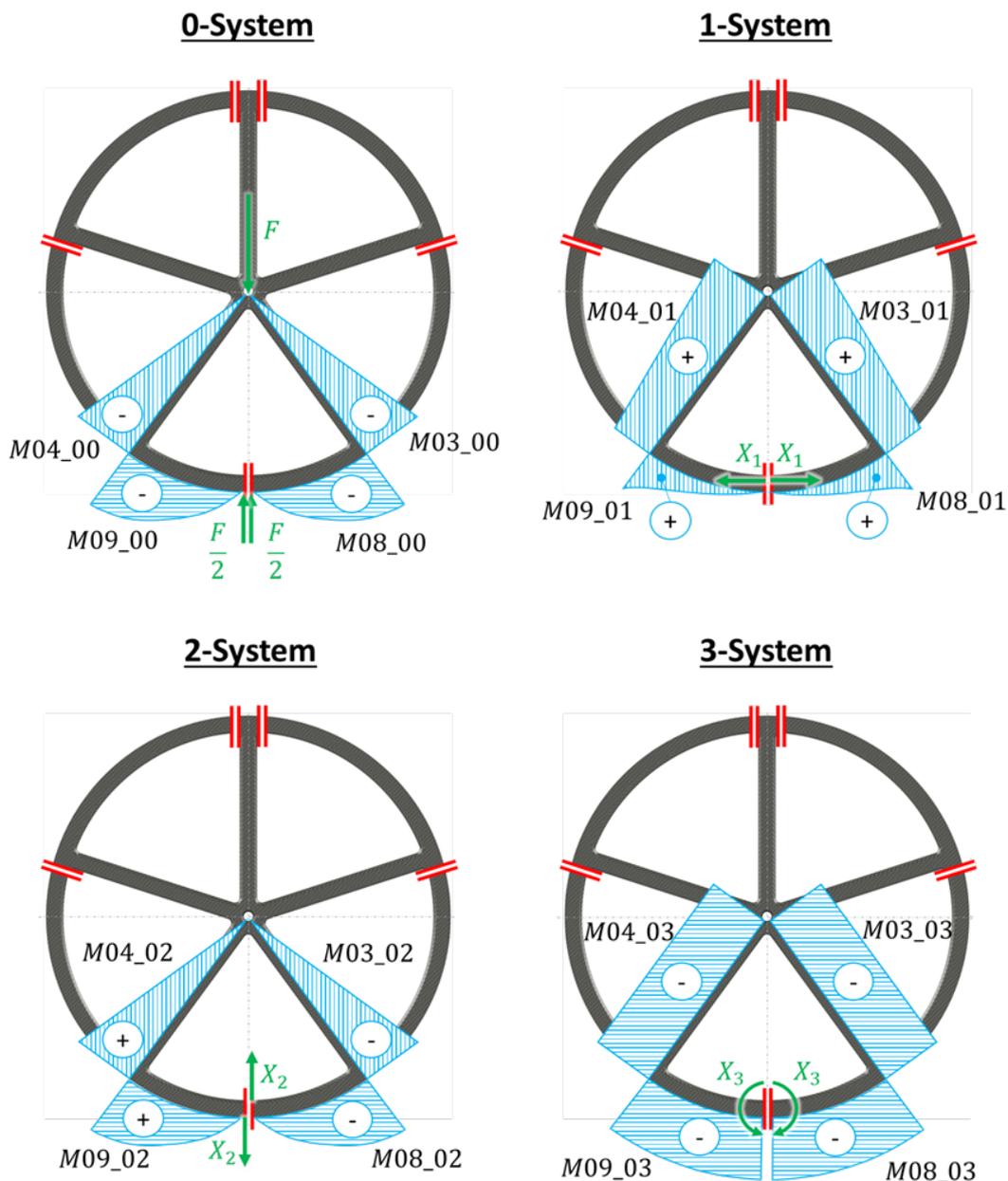


Abbildung 27 oben links: „0-System“ mit der angreifenden äußeren Last „F“, oben rechts: „1-System“ mit virtueller Belastung  $X_1$ , unten links: „2-System“ mit virtueller Belastung  $X_2$ , unten rechts: „3-System“ mit virtueller Belastung  $X_3$ . Alle Darstellungen zeigen qualitativ den in Folge der eingebrachten Belastung entstehende Momentenverlauf des Laufrads. [Eigene Darstellung]

3.1 zu halten. Dies führt, wie in Abbildung 28 rechts zu erkennen ist, links und rechts am Schnitt zu gegensätzlichen Vorzeichen.

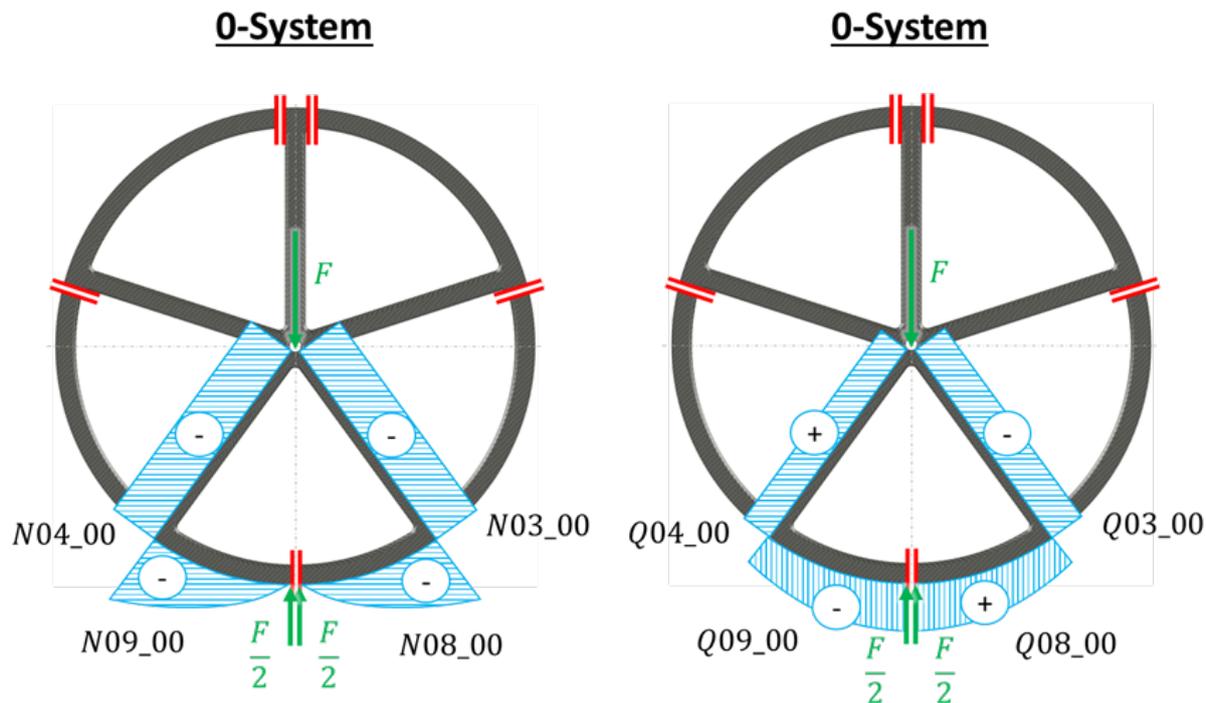


Abbildung 28 „0-System“ mit links: Normalkraftverlauf und rechts: Querkraftverlauf in Folge der äußeren radialen Belastung „F“. [Eigene Darstellung]

Für alle Systeme lässt sich der entsprechende Normal-, Querkraft- und Biegemomentverlauf berechnen und wie in den bereits gezeigten Abbildungen graphisch darstellen. Alle nicht dargestellten Systeme werden mit ihren entsprechenden virtuellen Kräften und den daraus resultierenden Verläufen im Anhang unter B.2, B.3 und B.4 dargestellt.

In Tabelle 11 werden die Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe des „0-“ und „1-Systems“ als Funktion beschrieben. Die Funktionen sind abhängig von  $\varphi_n$  bzw.  $x_n$ . Alle nicht aufgelisteten Speichen bzw. Felgenabschnitte des „0-Systems“ und „1-Systems“, werden durch die eingebrachten Kräfte nicht belastet. Dadurch ergeben die entsprechenden Funktionen den Wert 0. Da die Auflistung aller Funktionen umfangreich ist, sind die übrigen Funktionen der restlichen 14 Systeme im Anhang unter B.2, B.3 und B.4 zu finden. Wichtig ist anzumerken, dass in der Regel nur die Funktionen dargestellt werden, die  $\neq 0$  sind. Alle Funktionen der übrigen Speichen bzw. Felgenabschnitte die  $= 0$  sind, werden nicht dargestellt. In den Funktionen ist die Variable  $r$  zu finden, die an dieser Stelle keine echte Variable ist.  $r$  stellt den Abstand von Radnabe bis zur ideellen Faser da. Diese wird in Abschnitt 5.2.2 berechnet und als  $z_{ges}$  festgelegt wird. An dieser Stelle soll allerdings  $r$  beibehalten werden, da dies anschaulicher ist.

Tabelle 11 Momenten-, Normal- und Querkraftverläufe des „0-“ und „1-Systems“ als Funktion. Die Funktionen sind abhängig von  $\varphi_n$  bzw.  $x_n$ . Die Variable  $r$  stelle die ideale Faser dar ( $r=z_{ges}$ )

„0-System“ [***_00]				
Momentenverlauf	M03	$-\left(\frac{F}{2} * \sin(36^\circ) * x_3\right)$	M08	$-\left(\frac{F}{2} * \sin(\varphi_8) * r\right)$
	M04	$-\left(\frac{F}{2} * \sin(36^\circ) * x_4\right)$	M09	$-\left(\frac{F}{2} * \sin(\varphi_9) * r\right)$
Normalkraftverlauf	N03	$-\left(\frac{F}{2} * \cos(36^\circ)\right)$	N08	$-\left(\frac{F}{2} * \sin(\varphi_8)\right)$
	N04	$-\left(\frac{F}{2} * \cos(36^\circ)\right)$	N09	$-\left(\frac{F}{2} * \sin(\varphi_9)\right)$
Querkraftverlauf	Q03	$-\left(\frac{F}{2} * \sin(36^\circ)\right)$	Q08	$+\left(\frac{F}{2} * \cos(\varphi_8)\right)$
	Q04	$+\left(\frac{F}{2} * \sin(36^\circ)\right)$	Q09	$-\left(\frac{F}{2} * \cos(\varphi_9)\right)$

„1-System“ [***_01]				
Momentenverlauf	M03	$+(X_1 * (r - \cos(36^\circ) * x_3))$	M08	$+(X_1 * (r - \cos(\varphi_8) * r))$
	M04	$+(X_1 * (r - \cos(36^\circ) * x_3))$	M09	$+(X_1 * (r - \cos(\varphi_9) * r))$
Normalkraftverlauf	N03	$+(X_1 * \sin(36^\circ))$	N08	$-(X_1 * \cos(\varphi_8))$
	N04	$+(X_1 * \sin(36^\circ))$	N09	$-(X_1 * \cos(\varphi_9))$
Querkraftverlauf	Q03	$-(X_1 * \cos(36^\circ))$	Q08	$-(X_1 * \sin(\varphi_8))$
	Q04	$+(X_1 * \cos(36^\circ))$	Q09	$+(X_1 * \sin(\varphi_9))$

Somit liegen nun alle relevanten Informationen bereit um die tatsächlichen Kräfte und Momente im Gesamten Laufrad zu berechnen.

### 5.3 Durchführung der Berechnung

Nun folgt der eigentliche Teil der Berechnung, wofür auch das Computer-Algebra-Programm Maxima verwendet wird. Maxima hilft in erster Linie dabei die vielen Integrale mit Variablen zu lösen und als Funktion darzustellen. Zudem ist es äußerst hilfreich bei der Lösung großer linearer Gleichungssysteme.

Um die tatsächlichen Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe bestimmen zu können, werden zunächst die Verschiebungen berechnet. Daraus können die tatsächlichen Kraftkomponenten bestimmt werden, die somit die virtuellen Kräfte  $X_1$ - $X_{15}$  ersetzen. Die tatsächlichen Kraftkomponenten, werden zur besseren Unterscheidung gegenüber den virtuellen Kräften, mit  $Z_1$  bis  $Z_{15}$  benannt. Zum Schluss werden mit Hilfe der tatsächlichen Kraftkomponenten die tatsächlichen Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe in den einzelnen Laufradabschnitten ermittelt.

### 5.3.1 Berechnung der Verschiebungen

Wie bereits in Kapitel 3.3.2 beschrieben, werden die Verschiebungseinflusszahlen laut Formel (3.14) berechnet. Da die Berechnung nur in der Ebene stattfindet und keine Torsion betrachtet werden kann, fällt der Torsionsmoment-Term weg. Dies führt zur folgenden Formel:

$$\alpha_{n/0} = \int \frac{\bar{M}_n * M_0}{EI} dx + \int \frac{\bar{N}_n * N_0}{EA} dx + \int \frac{\bar{Q}_n * Q_0}{GA_s} dx$$

Bzw.

(5.60)

$$\alpha_{n/n} = \int \frac{\bar{M}_n * \bar{M}_n}{EI} dx + \int \frac{\bar{N}_n * \bar{N}_n}{EA} dx + \int \frac{\bar{Q}_n * \bar{Q}_n}{GA_s} dx$$

Das tiefgestellte  $n$  steht für das jeweilige System, für welches die Verschiebungseinflusszahl berechnet wird. Es sind dabei die Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe des entsprechenden Systems einzusetzen. Es muss bei der Berechnung berücksichtigt werden, dass das E-Modul  $E$ , das G-Modul  $G$ , das Flächenträgheitsmoment  $I$  sowie die Fläche  $A$  bzw. Schubfläche  $A_s$  davon abhängig ist, ob es sich jeweils um eine Speiche oder einen Felgenabschnitt handelt. Die Schubfläche berechnet sich aus dem Produkt von Fläche und Schubkorrekturfaktor. Da für solch spezielle Profile wie dem Felgenprofil kein Schubkorrekturfaktor zur Verfügung steht, wird dieser auf 1 gesetzt. Somit ist die Schubfläche  $A_s$  identisch mit der Querschnittsfläche  $A$ . Neben den bereits aufgezählten Unterschieden zwischen Speichen und Felgenabschnitten sind noch die Integrationsgrenzen zu erwähnen. Bei den Speichen wird über die Speichenlänge  $0 - r$  integriert. Die Felgenabschnitte werden über den Winkel  $\varphi$  integriert welcher über den Bereich  $0 - 72^\circ$  läuft. Da die Felgenabschnitte 8 und 9 jeweils nur über einen Winkel von  $32^\circ$  laufen, darf in diesem Fall auch nur über diesem Bereich integriert werden. In Formel (5.2) wird die Berechnungsvorgehensweise wie sie in Maxima implementiert wird anhand der Berechnung der Verschiebung  $\delta_{1/0}$  vorgestellt. Die Berücksichtigung der unterschiedlichen Winkel soll mit  $\varphi_{i_{max}}$  verdeutlicht werden. Da im Falle dieser Berechnung direkt die Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe mit den entsprechenden Kräften und

Momenten eingegeben werden, ist die Verschiebungseinflusszahl  $\alpha$  durch die Verschiebung  $\delta$  ersetzt.

$$\begin{aligned}
 \delta_{1/0} = & \underbrace{\sum_{i=1}^5 \int_0^r \frac{M_{0i_01} * M_{0i_00}}{(EI)_{ges\ Speiche}} dx}_{\text{Integrale der Speichen}} & + & \underbrace{\sum_{i=6}^{11} \int_0^{\varphi_{imax}} \frac{M_{0i_01} * M_{0i_00}}{(EI)_{ges\ Felge}} d\varphi}_{\text{Integrale der Felgenabschnitte}} \\
 & + \sum_{i=1}^5 \int_0^r \frac{N_{0i_01} * N_{0i_00}}{(EA)_{ges\ Speiche}} dx & + & \sum_{i=6}^{11} \int_0^{\varphi_{imax}} \frac{M_{0i_01} * M_{0i_00}}{(EA)_{ges\ Felge}} d\varphi \\
 & + \sum_{i=1}^5 \int_0^r \frac{Q_{0i_01} * Q_{0i_00}}{G_{Speiche} * A_{Speiche}} dx & + & \sum_{i=6}^{11} \int_0^{\varphi_{imax}} \frac{M_{0i_01} * M_{0i_00}}{G_{Felge} * A_{Felge}} d\varphi
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

Die Formel zeigt, dass grundsätzlich alle Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe der Speichen und Felgenabschnitte berücksichtigt werden, unabhängig davon ob diese gleich oder ungleich 0 sind. Dies setzt voraus, dass alle Verläufe zuvor in Maxima eingegeben werden. Diese Vorgehensweise macht es möglich, alle Verschiebungen mit dem gleichen Berechnungsschema zu berechnen. Es sind lediglich die entsprechenden Systemvariablen zu ändern. Diese Vorgehensweise bedeutet allerdings einen erhöhten Rechenaufwand.

Die einzelnen Verschiebungen können übersichtlich in einer Matrix dargestellt werden:

$$\begin{bmatrix}
 \delta_{1/0} & \delta_{1/1} & \delta_{1/2} & \cdots & \delta_{1/15} \\
 \delta_{2/0} & \delta_{2/1} & \delta_{2/2} & \cdots & \delta_{2/15} \\
 \delta_{3/0} & \delta_{3/1} & \delta_{3/2} & \cdots & \delta_{3/15} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \delta_{15/0} & \delta_{15/1} & \delta_{15/2} & \cdots & \delta_{15/15}
 \end{bmatrix} \tag{5.62}$$

Insgesamt müssen somit 240 Verschiebungen berechnet werden. Die leserliche Darstellung der tatsächlich berechneten Werte füllt eine gesamte DIN A4 Seite. Um den Lesefluss an dieser Stelle nicht zu stören, sind diese Werte im Anhang unter B.5 zu finden.

### 5.3.2 Berechnung der tatsächlichen Kraftkomponenten

Die virtuellen Kräfte  $X_1$  bis  $X_{15}$  wurden in den vorangegangenen Berechnungen genutzt um die Verschiebungen zu berechnen. Da diese jetzt vorliegen, kann die in Kapitel 3.3.2 dargestellte Formel (3.10) entsprechend umgeformt werden, sodass die tatsächlichen Kräfte  $Z_1$  bis  $Z_{15}$  berechnet werden können. Dafür werden alle virtuellen Kräfte  $X_n$  durch tatsächliche Kräfte  $Z_n$  ersetzt. Dieser Schritt dient lediglich der besseren Darstellung und klaren Trennung zwischen virtuellen Kräften  $X_n$  und tatsächlichen Kräften  $Z_n$ . Um die übliche Schreibweise von linearen Gleichungssystemen zu berücksichtigen, werden die Verschiebungen mit dem „0-System“ auf die rechte Seite der Gleichung gebracht. Dies führt zum linearen Gleichungssystem (5.4).

$$\begin{aligned}
 Z_1 * \delta_{1/1} + Z_2 * \delta_{1/2} + \dots + Z_{15} * \delta_{1/15} &= -\delta_{10} \\
 Z_1 * \delta_{2/1} + Z_2 * \delta_{2/2} + \dots + Z_{15} * \delta_{2/15} &= -\delta_{2/0} \\
 &\dots \\
 Z_1 * \delta_{15/1} + Z_2 * \delta_{15/2} + \dots + Z_{15} * \delta_{15/15} &= -\delta_{15/0}
 \end{aligned}
 \tag{5.63}$$

Mit den in Kapitel 5.3.1 berechneten Verschiebungen kann Maxima das Gleichungssystem (5.4) lösen. Die Ergebnisse für die tatsächlichen Kraftkomponenten  $Z_1$  bis  $Z_{15}$  werden in Tabelle 12 aufgelistet.

Tabelle 12 : tatsächliche innere Kraftkomponenten  $Z_1$  bis  $Z_{15}$  am Laufrad

$Z_1 =$	286,28 N	$Z_2 =$	0,0 N	$Z_3 =$	-124,16 Nm
$Z_4 =$	416,36 N	$Z_5 =$	468,56 N	$Z_6 =$	-37,29 Nm
$Z_7 =$	473,63 N	$Z_8 =$	310,8 N	$Z_9 =$	-19,69 Nm
$Z_{10} =$	473,63 N	$Z_{11} =$	-310,8 N	$Z_{12} =$	-19,69 Nm
$Z_{13} =$	416,36 N	$Z_{14} =$	-468,56 N	$Z_{15} =$	-37,29 Nm

### 5.3.3 Berechnung der tatsächlichen Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe

Die Berechnung der tatsächlichen Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe folgt nun durch die Addition der einzelnen Verläufe mit den tatsächlichen Kräften. Dazu werden in allen Verläufen die virtuellen Kräfte durch die tatsächlichen Kräfte ersetzt. Die Verläufe im „0-System“ bleiben davon unberührt, da in diesem System keine virtuellen Kräfte vorliegen. Da die virtuellen Kräfte mit einer dimensionslosen „1“ angenommen wurden, ist es nun ausreichend

die ursprünglichen Verläufe mit den entsprechenden, tatsächlichen Kraftkomponenten  $Z_n$  zu multiplizieren. Dies ist allerdings nur möglich, da sich die jeweilige virtuelle Kraft als Faktor, an erster Stelle jeder Verlaufsfunktion befindet.

Wie die Berechnung in Maxima integriert ist, soll das folgende Beispiel für den tatsächlichen Momentenverlauf  $M01$  der Speiche 1 darstellen:

$$\begin{aligned}
 M01 = & M01_{00} + Z_1 * M01_{01} + Z_2 * M01_{02} \\
 + & Z_3 * M01_{03} + Z_4 * M01_{04} + Z_5 * M01_{05} \\
 + & Z_6 * M01_{06} + Z_7 * M01_{07} + Z_8 * M01_{08} \\
 + & Z_9 * M01_{09} + Z_{10} * M01_{10} + Z_{11} * M01_{11} \\
 + & Z_{12} * M01_{12} + Z_{13} * M01_{13} + Z_{14} * M01_{14} \\
 + & Z_{15} * M01_{15}
 \end{aligned}
 \tag{5.64}$$

Die so mit Maxima berechneten Funktionen der tatsächlichen Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe werden im Folgenden aufgeführt.

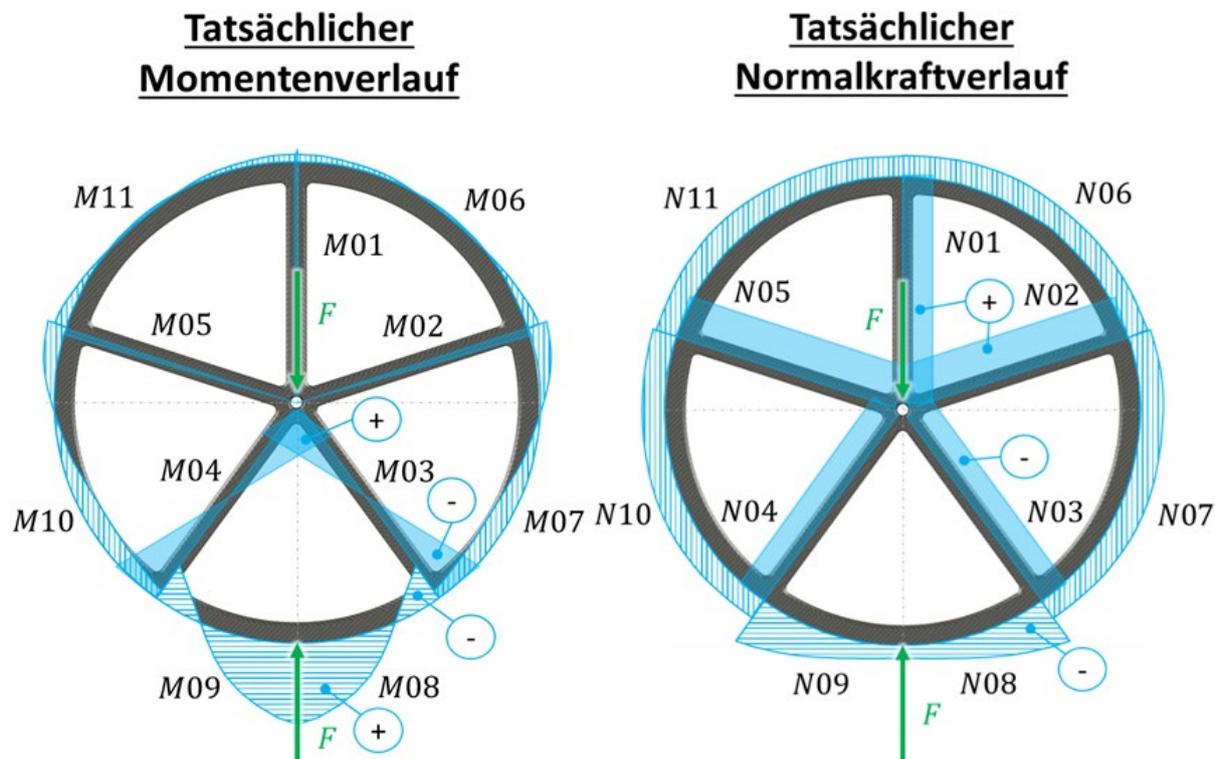


Abbildung 29 Qualitativ dargestellter tatsächlicher Momenten- und Normalkraftverlauf über dem gesamten Laufrad. [Eigene Darstellung]

In Abbildung 29 und Abbildung 30 sind die Verläufe qualitativ am Laufrad aufgetragen. Daraus ist ersichtlich, dass das Moment im Felgenabschnitt 8 und 9 mit Abstand am höchsten ist. Die Normalkraft verteilt sich relativ gleichmäßig im gesamten Laufrad. Nur an den Übergängen von Felgenabschnitt 8 und 9 zu den Speichen 3 und 4 sind leicht erhöhte Werte zu finden. Bei der Querkraft ist, ähnlich wie beim Moment, ein deutlich erhöhter Wert in den Felgenabschnitten 8 und 9 zu erkennen. Grundsätzlich sind alle Verläufe über die linken und rechten Laufradhälften symmetrisch. Lediglich beim Querkraftverlauf sind die Vorzeichen aufgrund des jeweiligen Schnittufers vertauscht.

### Tatsächlicher Querkraftverlauf

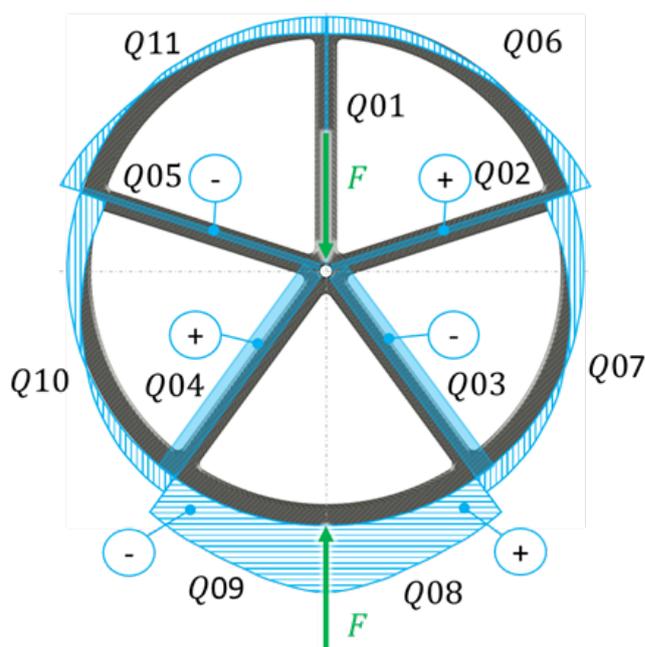


Abbildung 30 Qualitativ dargestellter tatsächlicher Querkraftverlauf über dem gesamten Laufrad. [Eigene Darstellung]

Die so dargestellten Verläufe stellen die inneren Belastungen des Laufrads an jeder einzelnen Stelle dar. Die Funktionen, welche die Verläufe beschreiben, werden im Anhang unter B.6 aufgelistet. Mit Hilfe dieser Funktionen ist für jede Stelle des Laufrads der exakte Wert für das dort auftretende Biegemoment, die Normalkraft und die Querkraft bestimmbar.

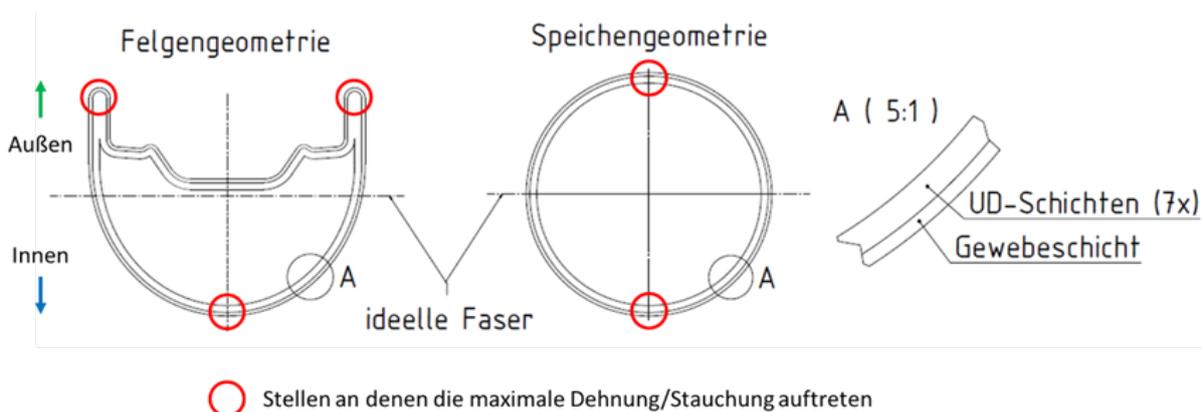
## 5.4 Nachlaufrechnung

In der Nachlaufrechnung werden die maximalen Spannungen in den einzelnen Laminatschichten bestimmt. Dazu müssen zunächst die Dehnungen im gesamten Laufrad berechnet werden. Die Dehnungen in Profilrichtung resultieren aus den Beanspruchungen durch Normalkräfte

und Biegemomente. Die Gesamtdehnung ergibt sich aus der Summe der beiden einzelnen Dehnungen infolge Normalkraft und Moment (siehe Kapitel 3.4.2). Die Querkraft hat keinen Einfluss auf die Dehnung in Profilrichtung.

### 5.4.1 Dehnungen

Da aufgrund maximaler Dehnungen zwangsläufig maximale Spannungen resultieren, sind lediglich die Stellen von Interesse, an denen die maximale Dehnung des Gesamtsystems vorliegt. Da die Versagensgrenzen des Materials für Dehnungen und Stauchungen unterschiedlich groß sind, müssen diese unterschieden werden. Durch den linearen Zusammenhang von Dehnungen und Stauchungen über die ideale Faser, in Folge von Biegemomenten, liegen die maximalen Beträge davon in den Randbereichen der Profile. Die zusätzlichen Dehnungen aufgrund der Normalkräfte ändert an dieser Tatsache nichts.



**Abbildung 31 Stellen maximaler Dehnung bzw. Stauchung am Felgen- und Speichengeometriequerschnitt [Eigene Darstellung]**

In Abbildung 31 sind die Stellen der maximalen Dehnung am Profil der Felge bzw. der Speichen markiert. Genau an diesen Stellen sind die Laminatschichten parallel zur ideellen Faser ausgerichtet und haben den bereits beschriebenen Aufbau aus sieben UD-Schichten Innen und einer Gewebeschicht Außen. Aufgrund der Symmetrie beim Felgenprofil liegen im oberen Bereich zwei Stellen mit maximaler Dehnung. Da beide Werte gleich groß sein müssen, wird für die weitere Berechnung lediglich ein einzelner Punkt betrachtet.

Zur Berechnung der Dehnungen infolge der Normalkräfte wird die Formel (3.33) herangezogen. In Maxima werden dazu alle Normalkraftverläufe der Felgenabschnitte und Speichen getrennt mit den jeweiligen Dehnsteifigkeiten der Felge bzw. Speiche verrechnet. Die folgenden Formeln (5.6) und (5.7) zeigen die Berechnung der Dehnungen der Speichen 1-5 und der Felgenabschnitte 6-11.

$$\varepsilon_{01-05 \text{ Zug/Druck}} = \frac{N_{01-05}}{(EA)_{ges\text{Speiche}}} \quad (5.65)$$

$$\varepsilon_{06-11 \text{ Zug/Druck}} = \frac{N_{06-11}}{(EA)_{ges\text{Felge}}} \quad (5.66)$$

Die Dehnungen und Stauchungen aufgrund von Momenten sind abhängig vom Abstand zur neutralen bzw. ideellen Faser. Dies ist anhand der Formel (3.34) deutlich zu erkennen. Da der Abstand von neutraler Faser zum Rand, an dem die maximale Dehnung auftritt, auf beiden Seiten der neutralen Faser nicht identisch sein muss, müssen die beiden Profilseiten getrennt betrachtet werden. In den folgenden Formeln (5.8), (5.9), (5.10) und (5.11) sind die in Maxima implementierten Formeln dargestellt. Auch hier ist darauf zu achten, dass die jeweils korrekten Biegesteifigkeiten für Felge und Speiche unterschieden werden.

$$\varepsilon_{01-05 \text{ Biegung}_{\text{Außen}}} = z_{\text{Außen}} * \left( \frac{M_{01-05}}{(EI)_{ges\text{Speiche}}} \right) \quad (5.67)$$

$$\varepsilon_{06-11 \text{ Biegung}_{\text{Außen}}} = z_{\text{Außen}} * \left( \frac{M_{06-11}}{(EI)_{ges\text{Felge}}} \right) \quad (5.68)$$

$$\varepsilon_{01-05 \text{ Biegung}_{\text{Innen}}} = z_{\text{Innen}} * \left( \frac{M_{01-05}}{(EI)_{ges\text{Speiche}}} \right) \quad (5.69)$$

$$\varepsilon_{06-11 \text{ Biegung}_{\text{Innen}}} = z_{\text{Innen}} * \left( \frac{M_{06-11}}{(EI)_{ges\text{Felge}}} \right) \quad (5.70)$$

Die jeweilige Seite des Profils zur neutralen Faser soll mit „Außen“ und „Innen“ unterschieden werden. Dabei ist „Außen“ bei der Felge die Richtung zum Reifen und „Innen“ die Richtung zur Radnabe. Die Richtungsunterscheidung ist bei den Speichen ebenfalls zu beachten. Um die Bezeichnungen einheitlich zu halten, wird auch hier zwischen „Außen“ und „Innen“ unterschieden. Da die entsprechenden Richtungen hier nicht logisch auf Basis der Geometrie beschrieben werden können, wird die Festlegung wie in Abbildung 32 dargestellt getroffen. Dabei werden die Speichenseiten, die in Uhrzeigerrichtung zeigen mit „Außen“ bezeichnet und die Speichenseiten, die entgegen dem Uhrzeigersinn zeigen mit „Innen“.

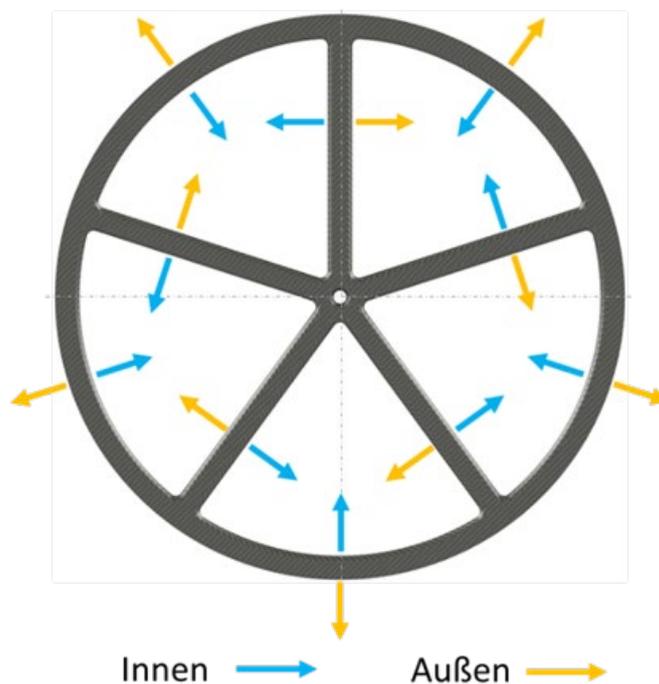


Abbildung 32 Unterscheidung der Profilbereiche in „Innen“ und „Außen“ zur Bestimmung der unterschiedlichen Dehnungen bzw. Stauchungen. [Eigene Darstellung]

Durch Addition (siehe Formel (3.34)) der Dehnungen infolge von Zug-/Druck-beanspruchung und der Momenten-Bearnspruchung, folgt die Gesamtdehnung. Dazu wird jeder einzelne Felgenabschnitt und jede Felge getrennt behandelt. Zudem wird abermals zwischen den Seiten „Innen“ und „Außen“ unterschieden. Die folgenden Formeln (5.12), (5.13), (5.14) und (5.15) repräsentieren die in Maxima implementierten Berechnungen.

**Gesamtdehnungen in den Speichen 01 bis 05**

$$\epsilon_{01-05GesAußen} = \epsilon_{01-05BiegungAußen} + \epsilon_{01-05Zug/Druck} \tag{5.71}$$

$$\epsilon_{01-05GesInnen} = \epsilon_{01-05BiegungInnen} + \epsilon_{01-05Zug/Druck} \tag{5.72}$$

**Gesamtdehnungen in den Felgenabschnitten 06 bis 11**

$$\epsilon_{06-11GesAußen} = \epsilon_{06-11BiegungAußen} + \epsilon_{06-11Zug/Druck} \tag{5.73}$$

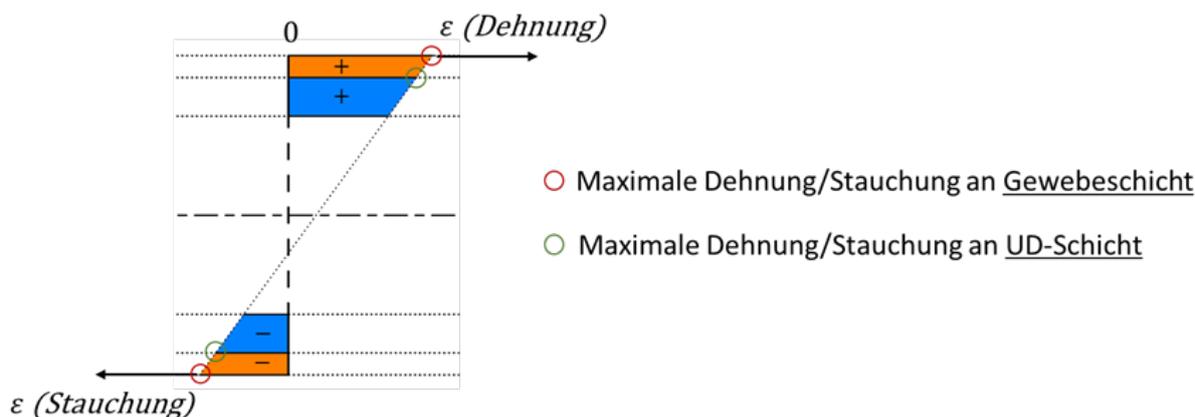
$$\epsilon_{06-11GesInnen} = \epsilon_{06-11BiegungInnen} + \epsilon_{06-11Zug/Druck} \tag{5.74}$$

**5.4.2 Maximale Schichtspannung**

Um die maximalen Einzelschichtspannungen ermitteln zu können, muss zunächst die Stelle gesucht werden, an der die maximale Dehnung auftritt. An dieser Stelle tritt zwangsläufig auch

die maximale Spannung auf. Da zwischen maximaler Dehnung und maximaler Stauchung unterschieden werden muss, können dafür zwei unterschiedliche Stellen notwendig sein. Durch den Einfluss der Normalkraft sowie die unterschiedlichen Abstände zur neutralen Faser, muss die maximale Dehnung nicht zwangsläufig im gleichen Schnitt liegen, in dem auch die maximale Stauchung liegt. Die Suche nach dem Punkt maximaler Dehnung bzw. Stauchung im gesamten Laufrad wird durch Überprüfung der Funktion in den Diagrammen durchgeführt.

Die in den zuvor berechneten Dehnungsverläufen zu findenden Maximalwerte, zeigen jeweils nur den Wert am äußersten Rand des jeweiligen Profils. Somit nur die maximale Dehnung der Gewebeschiicht. In Abbildung 33 ist beispielhaft ein Dehnungsverlauf im Schnitt über die einzelnen Schichten dargestellt. Die Gesamtdehnungen „Innen“ und „Außen“ die berechnet wurden, zeigen jeweils nur die Dehnung bzw. Stauchung am äußersten Rand der Gewebeschiicht (In Abbildung 33 mit einem roten Kreis markiert).



**Abbildung 33** Stellen der maximalen Dehnung/Stauchung der Gewebeschiicht und der UD-Schicht in einem Schnitt. Abbildung repräsentiert nicht die korrekten Schichtdicken sowie den richtigen Abstand zur neutralen Faser. [Eigene Darstellung]

Da die Dehnungen, wie in Abbildung 33 dargestellt, über die einzelnen Schichten linear verlaufen, kann die entsprechende maximale Dehnung an der äußersten UD-Schicht mit Hilfe des Strahlensatzes bestimmt werden. Dazu wird ein Dreieck aufgespannt, welches die Höhe des Profils hat und die Länge sich aus der Addition der einzelnen Dehnungs- bzw. Stauchungsbeträge ergibt. Durch Gegenüberstellung mit der Schichtdicke des Gewebes, kann der Betrag der Dehnung bestimmt werden, um welchen die Dehnung der äußersten UD-Schicht von der Dehnung der Gewebeschiicht abweicht.

Theoretisch könnten die maximalen Dehnungen und Stauchungen am Rand der äußersten UD-Schicht auch durch einsetzen des entsprechenden Abstands in die Formeln (5.8), (5.9), (5.10) und (5.11) berechnet werden. Somit würde man auch die entsprechenden Momentenverläufe für den äußeren Rand der UD-Schicht über das gesamte Laufrad erhalten. Da

allerdings die Berechnungen zeigten, dass die maximale Dehnung am äußeren Rand des Gewebes auch immer die Stelle ist, bei der auch die maximale Dehnung am äußeren Rand der UD-Schicht auftritt, kann auf die ausführliche Berechnung verzichtet werden. Es wird somit nur der Schnitt, bzw. die beiden Schnitte ausführliche betrachtet, bei denen die maximale Dehnung bzw. Stauchung am äußeren Rand der Gewebeschichten auftritt.

Um nun aus den Dehnungen bzw. Stauchungen der verschiedenen Schichten die Spannungen zu ermitteln, wird die Dehnung mit dem E-Modul der dazugehörigen Schicht multipliziert:

$$\sigma_{\text{Außen}}^{\text{UD}} = E_x^{\text{UD}} * \varepsilon_{\text{Außen}} \quad (5.75)$$

$$\sigma_{\text{Innen}}^{\text{UD}} = E_x^{\text{UD}} * \varepsilon_{\text{Innen}} \quad (5.76)$$

$$\sigma_{\text{Außen}}^{\#} = E_x^{\#} * \varepsilon_{\text{Außen}} \quad (5.77)$$

$$\sigma_{\text{Innen}}^{\#} = E_x^{\#} * \varepsilon_{\text{Innen}} \quad (5.78)$$

Wichtig zu erwähnen ist an dieser Stelle, dass die so berechneten Spannungen der einzelnen Schichten alle in Profilrichtung zeigen. Für die UD-Schichten sind dies gleichzeitig die Spannungen in Faserrichtung. Für das Gewebe, Spannungen um 45° verdreht zur Kett- und Schussrichtung. Um auch in der Gewebeschicht die Spannungen in Faserrichtung zu erhalten, müssen die Spannungen vom globalen Koordinatensystem in das schichtlokale Koordinatensystem transformiert werden. Dies kann durch eine Verzerrungstransformation wie in Schürmann [2, S. 210] und anschließender Berechnung der Spannungen geschehen. Die Werte durch die Verzerrungs-transformation können direkt in die Spannungsberechnung eingesetzt werden was zu folgender Beziehung führt:

#### *Spannungen in Kett- und Schussrichtung des Gewebes*

$$\sigma_{\text{Außen}}^{\#} = E_x^{\#} * 0,5 * \varepsilon_{\text{Außen}} \quad (5.79)$$

$$\sigma_{\text{Innen}}^{\#} = E_x^{\#} * 0,5 * \varepsilon_{\text{Innen}} \quad (5.80)$$

#### *Verzerrungen des Gewebes*

$$\gamma_{\text{Außen}}^{\#} = E_x^{\#} * (-1) * \varepsilon_{\text{Außen}} \quad (5.81)$$

$$\gamma_{\text{Innen}}^{\#} = E_x^{\#} * (-1) * \varepsilon_{\text{Innen}} \quad (5.82)$$

## 5.5 Plausibilitätsprüfung der durchgeführten Berechnung

Zur Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse während der Berechnungsdurchführung können unter anderem folgende Prüfungen durchgeführt werden:

- Da Belastung und Felgenaufbau symmetrisch sind, müssen die Momenten-, Querkraft- und Normalkraftverläufe auch symmetrisch sein. Beim Querkraft-verlauf ist aufgrund der Vorzeichenkonvention für linkes und rechtes Schnittufer zu beachten, dass die Vorzeichen unterschiedlich sind.
- Die Dehnungsverläufe der linken Laufradhälfte sowie der rechten Laufradhälfte müssen aufgrund der Symmetrie ebenfalls identisch sein.
- Bei der in Kapitel 5.3.1 beschriebenen Verschiebungsmatrix, muss es sich um eine symmetrische Matrix handeln.
- An den Schnittstellen zwischen Felge und Speiche muss die Summe aller inneren Momente, sowie die Summe aller inneren Kräfte in X- und Y-Richtung 0 ergeben.
- Da die Geometrie des Laufrads, der Laminataufbau und die Belastung einem auf dem Markt befindlichen Laufrad sehr ähnlich sind, sollten die errechneten Dehnungen maximal im einstelligen Prozentbereich liegen.

Diese Prüfungen stellen sicher, dass keine grundsätzlichen Rechenfehler vorliegen.

## 5.6 Variantenübersicht

Die bisher durchgeführte Berechnung wurde in Maxima implementiert. Dies macht es möglich durch Änderung verschiedener Parameter verhältnismäßig schnell, unterschiedliche Geometrien oder Belastungsvarianten zu berechnen. Im Folgenden werden die im Rahmen dieser Arbeit zu betrachtenden Varianten vorgestellt. Zunächst soll der Einfluss der zusätzlichen Bremskraft mitberücksichtigt werden.

Der wichtigste Stellhebel für die Auslegung von Bauteilen ist neben dem Material die Geometrie des Bauteils. Aus diesem Grund werden unterschiedliche Felgen- und Speichenquerschnitts-Geometrien betrachtet.

Der Faservolumenanteil, die Faser sowie die Matrix, die Anzahl der Schichten, die Schichtdicke sowie die Ausrichtung der Fasern in den einzelnen Schichten sind ebenfalls wesentliche Parameter bei der Auslegung von Faserverbundbauteilen. Im Rahmen dieser Berechnung soll ein Vergleich stattfinden, in wie weit die Anzahl der UD-Schichten einen Einfluss auf das

---

Ergebnis hat. Die Gewebeschicht bleibt dabei unberührt. Da die zusätzliche Bremskraft einen entscheidenden Einfluss auf die Belastung hat, werden alle weiteren Varianten mit zusätzlicher Bremskraft  $B$  berechnet.

### 5.6.1 Mit Bremskraft

In Kapitel 4.3.2 wurde die wirkende Kraft am Laufrad durch eine maximal mögliche Bremsung bestimmt. Diese Kraft soll im Rahmen der Variante „mit Bremskraft“ in der Berechnung mitberücksichtigt werden.

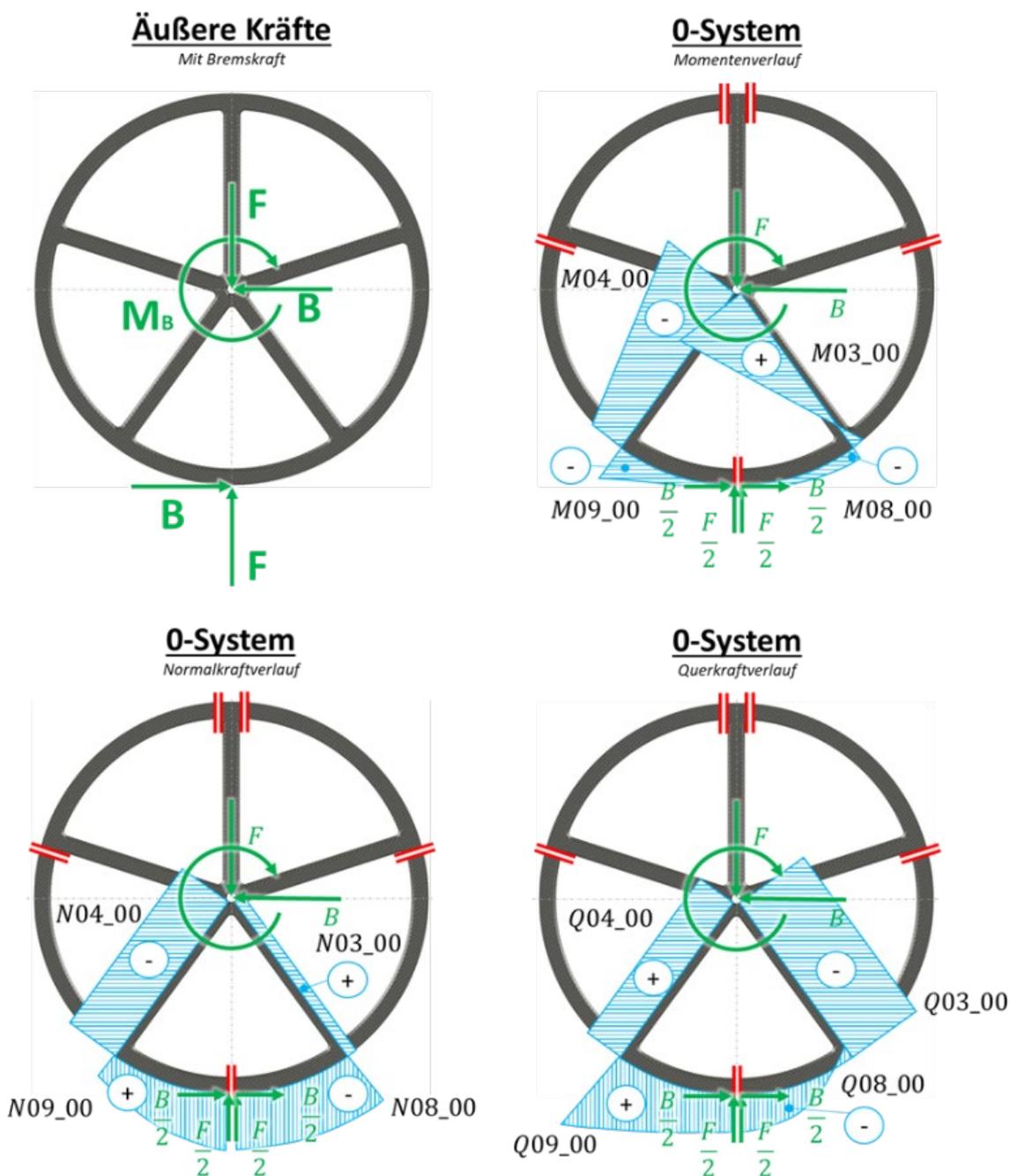


Abbildung 34 : Darstellung der äußeren Belastungen durch zusätzliche Bremskraft  $B$  (oben links). So wie Darstellung der Momenten- (oben rechts), Normalkraft- (unten links) und Querkraftverläufe (unten rechts) infolge dieser Belastung im „0-System“. [Eigene Darstellung]

Zur übersichtlichen Darstellung wird die Bremskraft „B“ in das Freikörperbild (siehe Abbildung 34 oben links) eingetragen. Die Lagerreaktionen an der Nabe: das Moment  $M_B$  und die horizontale Kraft  $B$ , welche entgegen der am Umfang angreifenden Bremskraft  $B$  wirkt, werden ebenfalls angetragen.

Durch das hinzufügen der Schnitte, wie in Kapitel 5.2.1, können die Momenten-, Normalkraft- und Querkraftverläufe des „0-Systems“ berechnet werden. Die qualitative Darstellung der Verläufe ist in Abbildung 34 zu sehen. Gegenüber den Verläufen des „0-Systems“ ohne Querkraft weisen die Verläufe mit Bremskraft keine Symmetrie auf. Die Funktionen der einzelnen Verläufe werden im Anhang B.7 aufgelistet. Zur Berechnung der Variante „mit Bremskraft“ werden die Funktionen der Verläufe des „0-Systems“ in Maxima ausgetauscht. Alle weiteren Funktionen der Systeme „1“ bis „15“ bleiben unverändert. Zusätzlich muss die Variable der Bremskraft „B“ in Maxima belegt werden. Da eine Sicherheit von 1,5 eingerechnet wird ergibt sich für die Variable „B“:  $B = 880 \text{ N} * 1,5$ .

### 5.6.2 Felgenprofil

Der Einfluss des Felgenprofils auf die Berechnung wird über die Änderung der Halbellipsenlänge durchgeführt. In Abbildung 35 wird die Änderung dargestellt. Das Ausgangsprofil wird mit „F0“ bezeichnet und ist in Abbildung 35 in der Mitte zu sehen. Das Maß welches die Länge der Halbellipse bei Variante „F0“ beschreibt, liegt bei  $22,23 \text{ mm}$ . Es werden insgesamt 7 zusätzliche Varianten erzeugt wobei das Minimum die Variante „F-14“ und das Maximum die Variante „F+20“ darstellt. Die Variantenbezeichnung beschreibt die Änderung der Halbellipsenlänge bezüglich der Ausgangsvariante „F0“.

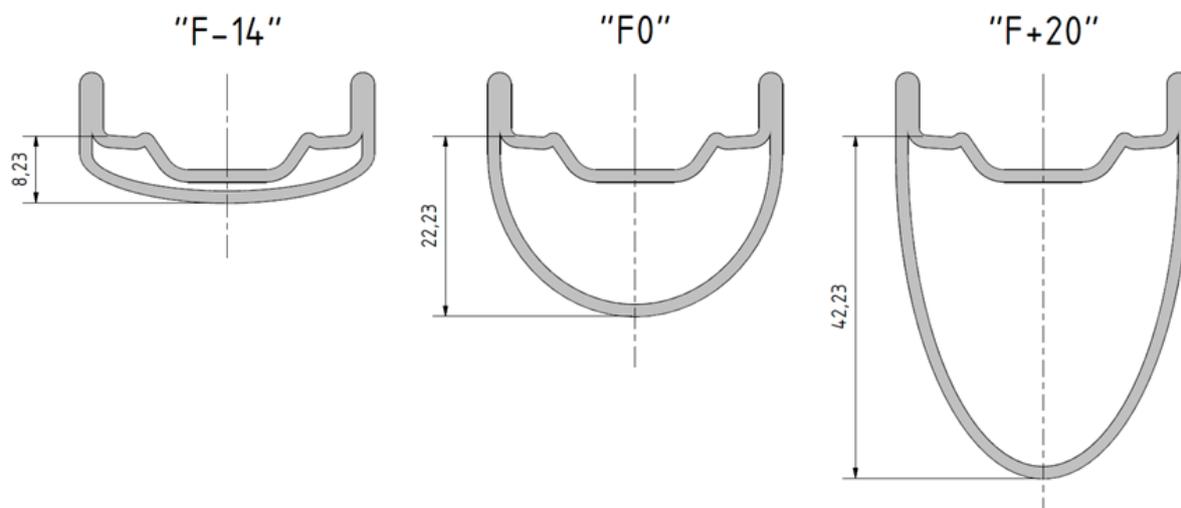


Abbildung 35 Felgenquerschnittsgeometrie Variante „F-14“ (links), Variante „F0“ (Mitte) und „F+20“ (rechts). [Eigene Darstellung]

Die mit der Ausgangsvariante „F0“ insgesamt acht Varianten werden in folgende unterschieden: „F-14“, „F-10“, „F-5“, „F0“, „F5“, „F10“, „F15“ und „F20“. Die unterschiedlichen Varianten ändern die Profilflächengröße, die Flächenträgheitsmomente sowie die Flächenschwerpunkte der Gewebeschicht und der zusammengefassten Gesamt-UD-Schicht. Zur Berechnung müssen diese Werte im Maxima-Programm ausgetauscht werden. Die geometrischen Schichteigenschaften im Schnitt, welche ähnlich Kapitel 5.2.1 ermittelt werden, sind im Anhang B.8 zu finden.

### 5.6.3 Speichenprofil

Ähnlich der Felgenprofilvarianten ist die Berechnung der Speichenprofilvarianten. Zusammen mit dem Ausgangsprofil werden insgesamt neun unterschiedliche Geometrien berechnet. Die Ausgangsgeometrie der Felge wird mit „S32“ bezeichnet. Sie besteht aus einem Kreisring mit Außendurchmesser  $32\text{ mm}$  (siehe Abbildung 36 Mitte). Die Variante „S12“ stellt den kleinsten Speichenquerschnitt dar. Bei den kreisringförmigen Profilen „S12“, „S17“, „S22“, „S27“ und „S32“ stellt die Zahl in der Variantenbezeichnung immer den Außendurchmesser des Profils dar.

Da die Speiche nicht breiter sein soll als die Felge, werden die weiteren Varianten „S32+5“, „S32+10“, „S32+15“ und „S32+20“ als Ellipse ausgeführt (siehe Abbildung 36 rechts). Die Breite der Ellipse bleibt dabei einheitlich auf  $32\text{ mm}$ . Die Länge dagegen ändert sich um den jeweils in der Variantenbezeichnung angegebenen Wert. Für die Variante „S32+20“ entspricht dies einer Ellipsenlänge von  $52\text{ mm}$  (siehe Abbildung 36).

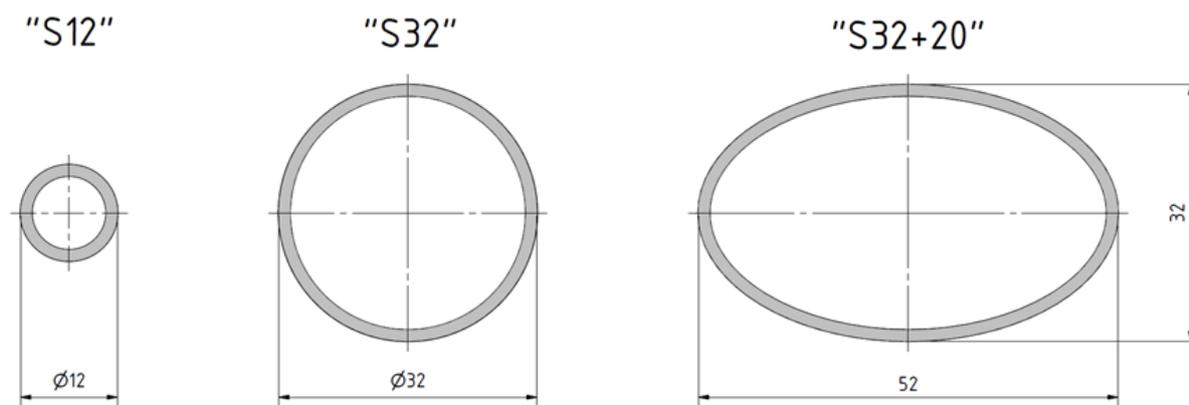


Abbildung 36 Speichenquerschnittsgeometrie Variante „S12“ (links), Variante „S32“ (Mitte) und „S32+20“ (rechts). [Eigene Darstellung]

Wie bei den Felgengeometrievarianten haben die Speichengeometrievarianten einen Einfluss auf die geometrischen Schichteigenschaften. Die, ähnlich Kapitel 5.2.1, ermittelten Eigenschaften, sind im Anhang B.9 zu finden. Diese sind zur Berechnung der unterschiedlichen Varianten im Maxima-Programm entsprechend auszutauschen.

#### 5.6.4 Laminataufbau

Eine weitere Variante soll die Änderung am Laminataufbau darstellen. Wie in Kapitel 4.1 beschrieben und in Abbildung 20 dargestellt, besteht das Ausgangslaminat aus sieben einzelnen UD-Schichten sowie einer Gewebeschicht. Die Gewebeschicht, die Außenkontur der Felge und Speiche soll unangetastet bleiben. Für die Variante „Laminataufbau“ soll lediglich die Anzahl der UD-Schichten reduziert werden. Für die Varianten wird jeweils die innerste Schicht weggelassen, sodass insgesamt sieben Varianten entstehen: Die Ausgangsvariante mit Gewebeschicht und sieben einzelnen UD-Schichten, bis zur Variante Gewebeschicht mit nur einer UD-Schicht. Der Einfluss auf die Berechnung und die anzupassenden Parameter sind wie bei der Felgen- oder Speichenprofiländerung ausschließlich die geometrischen Schichteigenschaften. Es müssen lediglich die Flächenträgheitsmomente, die Flächen sowie die Flächenschwerpunkte der Gesamt-UD-Schicht für Felge und Speiche bestimmt werden und im Maxima-Berechnungsprogramm ausgetauscht werden. Die Werte für die Gewebeschicht bleiben unverändert. Die ermittelten und in die Berechnung einzusetzenden Werte sind im Anhang B.10 zu finden.

## 6 Ergebnisse aus der Berechnung

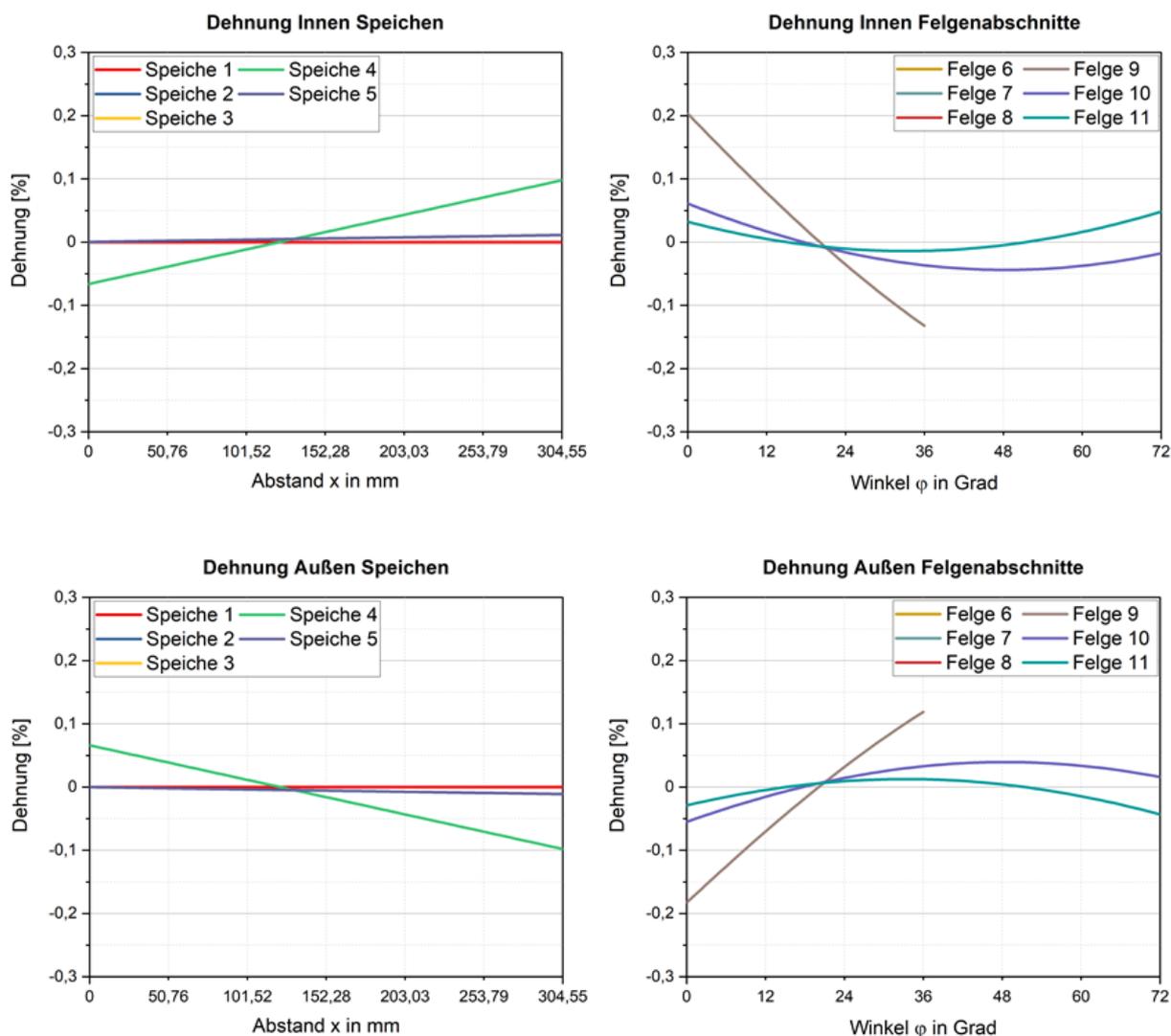
In diesem Kapitel werden die Berechnungsergebnisse der verschiedenen Varianten vorgestellt. Zunächst werden die Berechnungsergebnisse *ohne* und *mit* zusätzlicher Bremskraft aufgeführt. Im Rahmen dessen wird die Spannungsverteilung im Laminat an der Stelle maximaler Dehnung genauer betrachtet.

Im Anschluss werden die Ergebnisse der Felgen- und Speichengeometrievarianten-Kombinationen dargestellt. Bei dieser Betrachtung wird auf die Spannungsverteilung verzichtet und nur die maximale Dehnung im gesamten Laufrad betrachtet. Auch bei den Berechnungsergebnissen bezüglich unterschiedlicher Anzahl an UD-Schichten werden lediglich die maximalen Dehnungen im Laufrad betrachtet.

Zusätzlich zu den maximalen Dehnungen wird aufgezeigt, welche Masse sich bei den entsprechenden Varianten einstellt und wie sich diese zueinander verhalten.

### 6.1 Dehnungen und Spannungen ohne Bremskraft

In diesem Abschnitt werden die berechneten Dehnungen und Spannungen infolge der Basisberechnung dargestellt. Die Basisberechnung berücksichtigt lediglich die radiale Belastung wie sie in Kapitel 5.2.1 beschrieben und in Abbildung 24 dargestellt ist. Dies ist die Belastung **ohne** Bremskraft.



**Diagramm 2** Die verschiedenen Diagramme zeigen die Dehnungen in den einzelnen Laufradabschnitten in Folge radialer Belastung. Es wird unterschieden zwischen den Dehnungen „Innen“ (Oben) und „Außen“ (Unten). Auf der linken Seite sind die Speichen dargestellt, auf der rechten die Felgenabschnitte [Eigene Darstellung]

Das Ergebnis der Berechnung wird in Diagramm 2 aufgezeigt. Diagramm 2 teilt sich in vier einzelne Diagramme auf. Die Diagramme zeigen die Dehnung in Prozent über der jeweiligen Speiche bzw. dem jeweiligen Felgenabschnitt. Die beiden oberen Diagramme zeigen die Dehnungen „Innen“ wohingegen die beiden unteren Diagramme die Dehnungen „Außen“ zeigen. Die Definition von „Innen“ und „Außen“ lässt sich in Abbildung 32 auf Seite 71

nachschlagen. Die Definitionen der Felgenabschnitte sowie der Speichen sind auf Seite 57 in Abbildung 25 zu finden. Die in den Diagrammen aufgetragenen Dehnungen entsprechen den Dehnungen an den in Abbildung 31 gezeigten Punkten im Profilquerschnitt.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit und der unterschiedlichen Dimensionen auf der X-Achse, werden die Felgenabschnitte und die Speichen in getrennten Diagrammen dargestellt. Die Speichen sind in den beiden Diagrammen auf der linken Seite von Diagramm 2 zu sehen, die beiden Diagramme mit den Felgenabschnitten auf der rechten Seite. Auf den ersten Blick ist bereits auffällig, dass die Dehnungsverläufe „Innen“ zu „Außen“ um die 0-Linie gespiegelt scheinen. Schaut man sich die Werte genau an, stimmen die Beträge allerdings nicht exakt überein.

Aufgrund des symmetrischen Laufrads sowie der symmetrischen Belastung sind die Dehnungen auf der linken und rechten Laufradhälfte identisch. Das führt dazu, dass in den dargestellten Diagrammen die Verläufe für die „Speiche 2“ und die „Speiche 3“ nicht sichtbar sind. Der Verlauf von „Speiche 2“ ist identisch mit „Speiche 5“ ebenso der Verlauf von „Speiche 3“ mit „Speiche 4“. Aus diesem Grund werden diese vollständig verdeckt und sind im Diagramm nicht erkennbar. Das gleiche gilt für die Felgenabschnitte. Bei den Felgenabschnitten ist „Felge 6“ und „Felge 11“, „Felge 7“ und „Felge 10“ sowie „Felge 8“ und „Felge 9“ identisch und jeweils in den Diagrammen verdeckt. Da „Felge 8“ und „Felge 9“ ein geteilter Felgenabschnitt ist, sind nur Werte bis  $36^\circ$  aufgetragen (zum Verständnis siehe Abbildung 25).

Die Speichen zeigen bis auf „Speiche 3“ und „Speiche 4“ kaum nennenswerte Dehnungen. Die mit Abstand maximalen Dehnungen treten an den Felgenabschnitten „Felge 8“ und „Felge 9“ auf. Dabei treten die maximalen positiven Dehnungen und die maximalen negativen Dehnungen an der gleichen Stelle ( $\varphi_8 = \varphi_9 = 0^\circ$ ) auf. Die Stelle  $\varphi_8 = \varphi_9 = 0^\circ$  ist der Punkt der Krafteinleitung  $F$  und die Grenzfläche zwischen den beiden Felgenabschnitten „Felge 8“ und „Felge 9“. Die maximale positive Dehnung liegt „Innen“ und beträgt 0,203 %. Die maximale negative Dehnung liegt „Außen“ und beträgt  $-0,183$  %.

In Abbildung 37 links wird der Dehnungsverlauf im Laminat dargestellt. Die Werte maximaler Dehnung „Außen“ und „Innen“ finden sich entsprechend am oberen Rand bzw. am unteren Rand wieder. Die Dehnungen an der Schichtgrenze zwischen UD-Schicht und Gewebeschicht sowie die Dehnung am Rand der letzten UD-Schicht sind ebenfalls angetragen. Es ist zu erkennen, dass die Dehnungen in Richtung der Profilmitte kleiner werden. Es ist anzumerken, dass der Abstand zwischen „Innen“ und „Außen“ nicht maßstabsgetreu ist, die Dicke der Schichten jedoch sind im korrekten Verhältnis dargestellt. Die sieben UD-Schichten sind als eine Gesamt-UD-Schicht abgebildet.

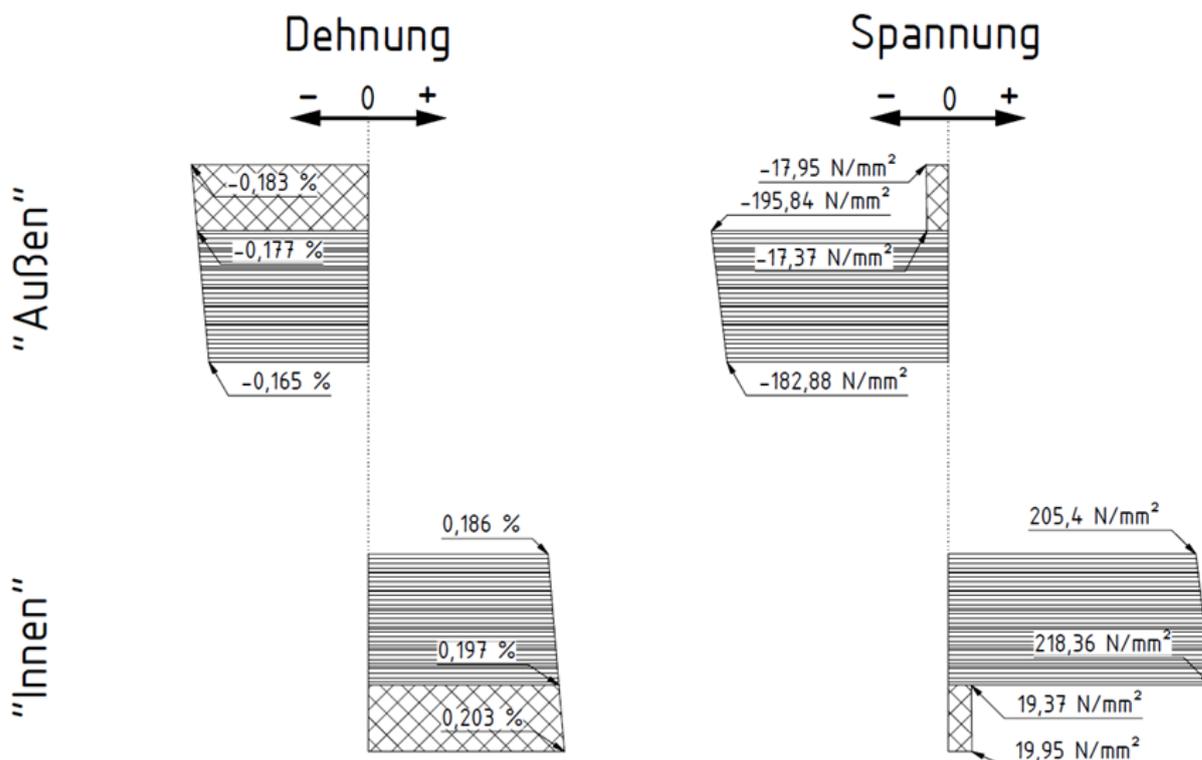
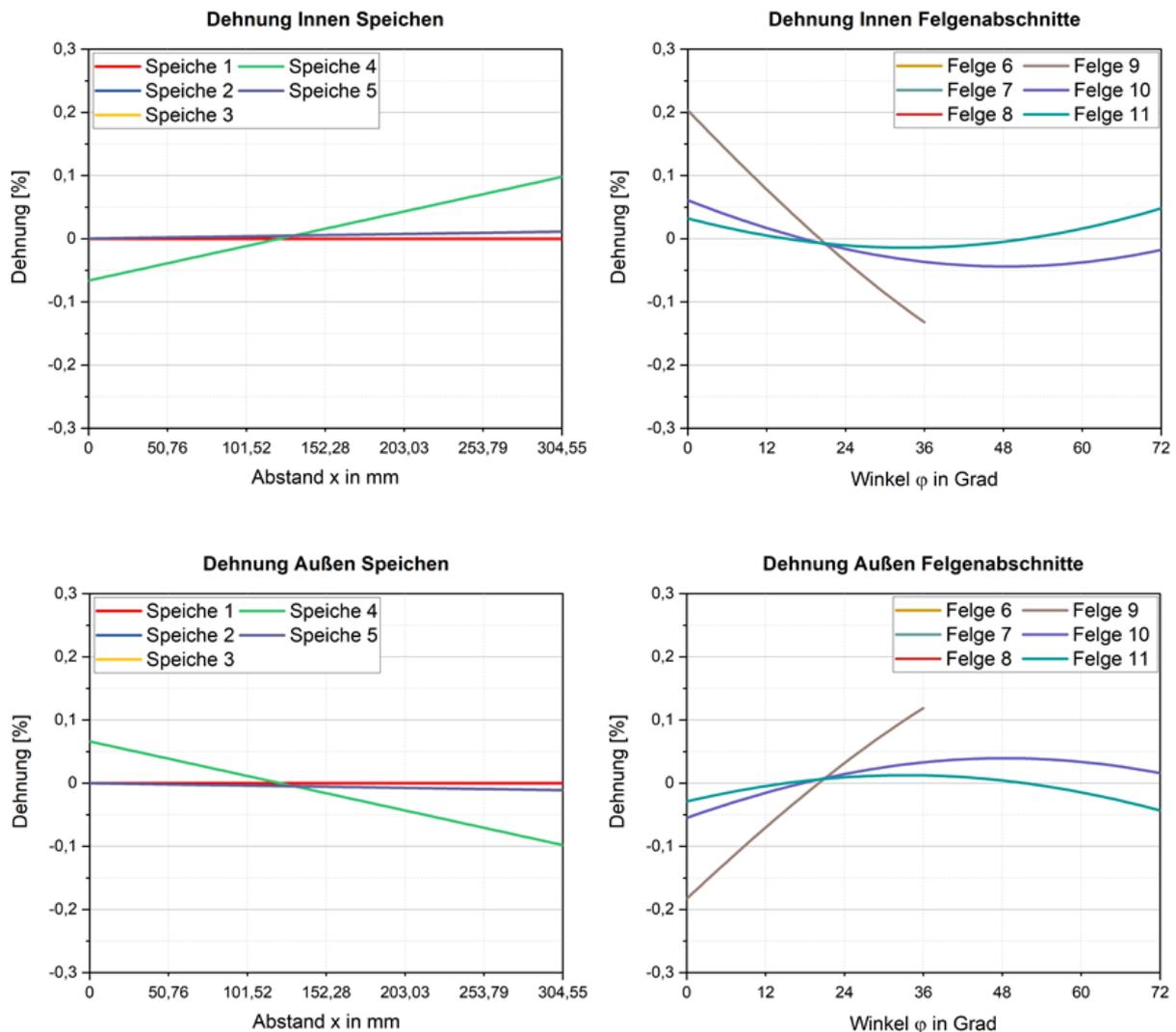


Abbildung 37 Dehnungs- und Spannungsverlauf im Laminat an der Stelle maximaler Dehnung ohne Bremskraft. Die Fläche mit Kreuzschraffur stellt die Gewebeschicht dar. Der mit parallelen Linien gefüllte Bereich stellt die 7 UD-Schichten dar. [Eigene Darstellung]

Die Spannungen in Profilrichtung in Folge der Dehnungen sind in Abbildung 37 rechts aufgetragen. Die Gewebeschicht weist im Vergleich zur UD Schicht deutlich geringere Spannungen auf. Betrachtet man die Spannungen der UD-Schichten „Außen“ und „Innen“ ist festzustellen, dass betragsmäßig ähnlich groß sind. Dies gilt ebenfalls für die Gewebeschicht. Wie die Dehnungen, nehmen auch die Spannungen in Richtung Profilmittte ab.

## 6.2 Dehnungen und Spannungen mit Bremskraft

In diesem Abschnitt werden die berechneten Dehnungen und Spannungen mit anliegender Bremskraft dargestellt. Die anliegenden äußeren Kräfte sind in Kapitel 5.6.1 beschrieben und in Abbildung 34 dargestellt ist.



**Diagramm 3** Die verschiedenen Diagramme zeigen die Dehnungen in den einzelnen Laufradabschnitten infolge der radialen Belastung sowie der tangentialen Bremskraft. Es wird unterschieden zwischen den Dehnungen „Innen“ (Oben) und „Außen“ (Unten). Auf der linken Seite sind die Speichen dargestellt, auf der rechten die Felgenabschnitte [Eigene Darstellung]

Das Ergebnis der Dehnungsberechnung ist in Diagramm 3 dargestellt. Es handelt sich bei den dargestellten Diagrammen, genau wie bei in Kapitel 6.1, um die Dehnungen der Speichen und Felgenabschnitte „Innen“ (oben) sowie Speichen und Felgenabschnitte „Außen“ (unten). Um eine gute Vergleichbarkeit der Diagramme untereinander zu gewährleisten sind alle Y-Achsen einheitlich skaliert.

Auch bei den hier dargestellten Diagrammen scheint es auf den ersten Blick so, dass die Dehnungsverläufe „Innen“ zu „Außen“ um die 0-Linie gespiegelt sind. Vergleicht man die Beträge allerdings exakt, sind auch hier geringe Abweichungen zu erkennen.

Die zusätzliche Bremskraft führt dazu, dass die Dehnungen im Laufrad nicht mehr symmetrisch auf der linken und rechten Seite des Laufrads verteilt sind. In den Diagrammen ist dies erkennbar durch die individuellen Dehnungsverläufe selbst bei geometrisch gegenüberliegenden Speichen bzw. Felgenabschnitten.

Die maximalen positiven und negativen Dehnungen sind in „Felge 9“ bei  $\varphi_9 = 36^\circ$  zu finden. „Innen“ beträgt die Stauchung an dieser Stelle  $-0,233\%$ , die Dehnung „Außen“  $0,210\%$ . Gegenüber den Ergebnissen ohne Bremskraft treten die maximalen Dehnungen und Stauchungen mit Bremskraft somit nicht am gleichen Ort im Laufrad auf. In der Größenordnung vergleichbar hohe Dehnungen treten an „Speiche 3“ bei  $304,55\text{ mm}$  und bei der „Felge 8“ und „Felge 9“ bei  $\varphi_9 = \varphi_8 = 0^\circ$  auf.

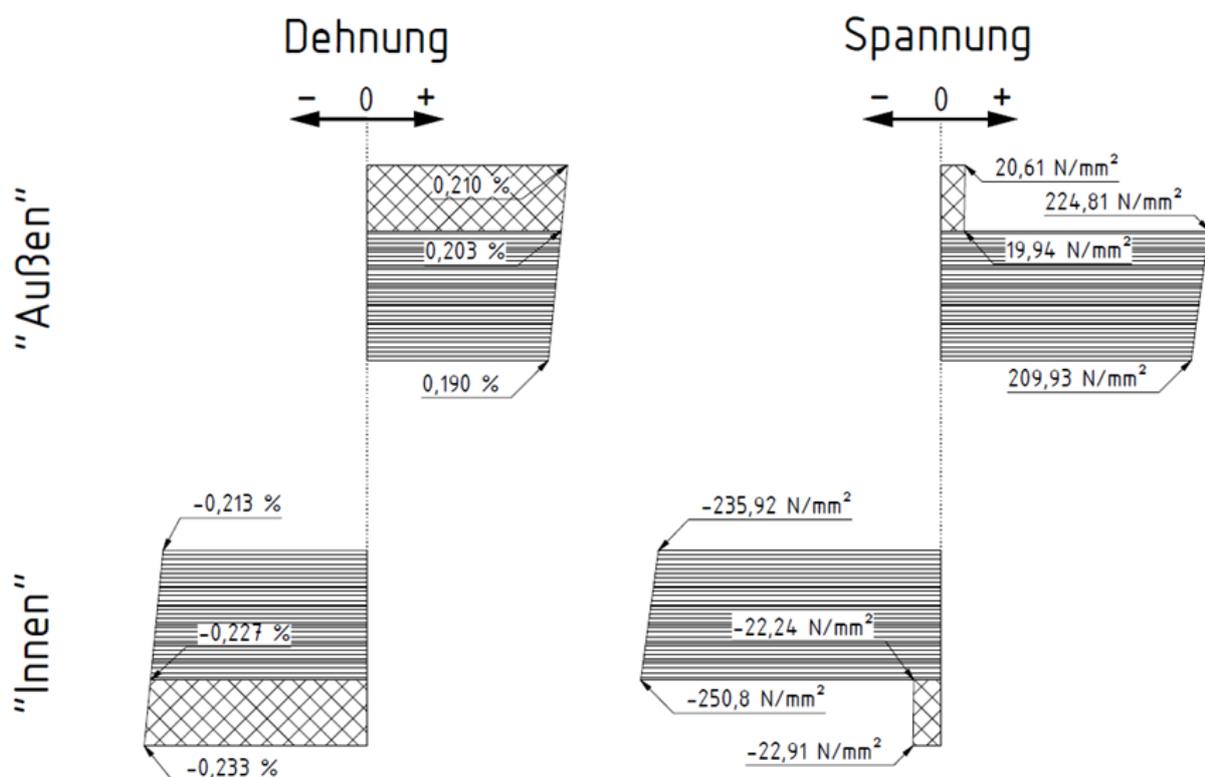


Abbildung 38 Dehnungs- und Spannungsverlauf im Laminat an der Stelle maximaler Dehnung mit Bremskraft. Die Fläche mit Kreuzschraffur stellt die Geweschicht dar. Der mit parallelen Linien gefüllte Bereich stellt die 7 UD-Schichten dar. [Eigene Darstellung]

Zur genaueren Betrachtung der Stelle maximaler Dehnung und Stauchung ist der Dehnungsverlauf in Abbildung 38 links über dem Laminat aufgetragen. Die maximale Dehnung von  $0,210\%$  findet sich am oberen Rand der Geweschicht „Außen“ wieder. Die maximale Stauchung von  $-0,233\%$  findet sich am unteren Rand der Geweschicht „Innen“ wieder. Im Gegensatz zu den Dehnungen ohne Bremskraft ist auffällig, dass mit Bremskraft „Außen“ positive Dehnungen auftreten und „Innen“ negative. Die Ergebnisse ohne Bremskraft sind entgegengesetzt. Vergleicht man die Beträge der Dehnungen ohne und mit Bremskraft, lässt sich feststellen, dass die Stauchung um etwa  $23\%$  höher ausfällt (ohne Bremskraft =  $-0,183\%$ , mit

Bremskraft = -0,233 %). Die Dehnung ist lediglich um etwa 3 % größer (ohne Bremskraft = 0,203 %, mit Bremskraft = 0,210 %).

In Abbildung 38 rechts sind die Schichtspannungen in Profilrichtung aufgrund der Dehnungen dargestellt. Entsprechend der Dehnungen ergibt sich auch hier, dass die Druck- und Zugspannungen gegenüber den Spannungen ohne Bremskraft von „Innen“ und „Außen“ vertauscht sind. Die Spannungen sind entsprechend der Dehnungsvergrößerung größer.

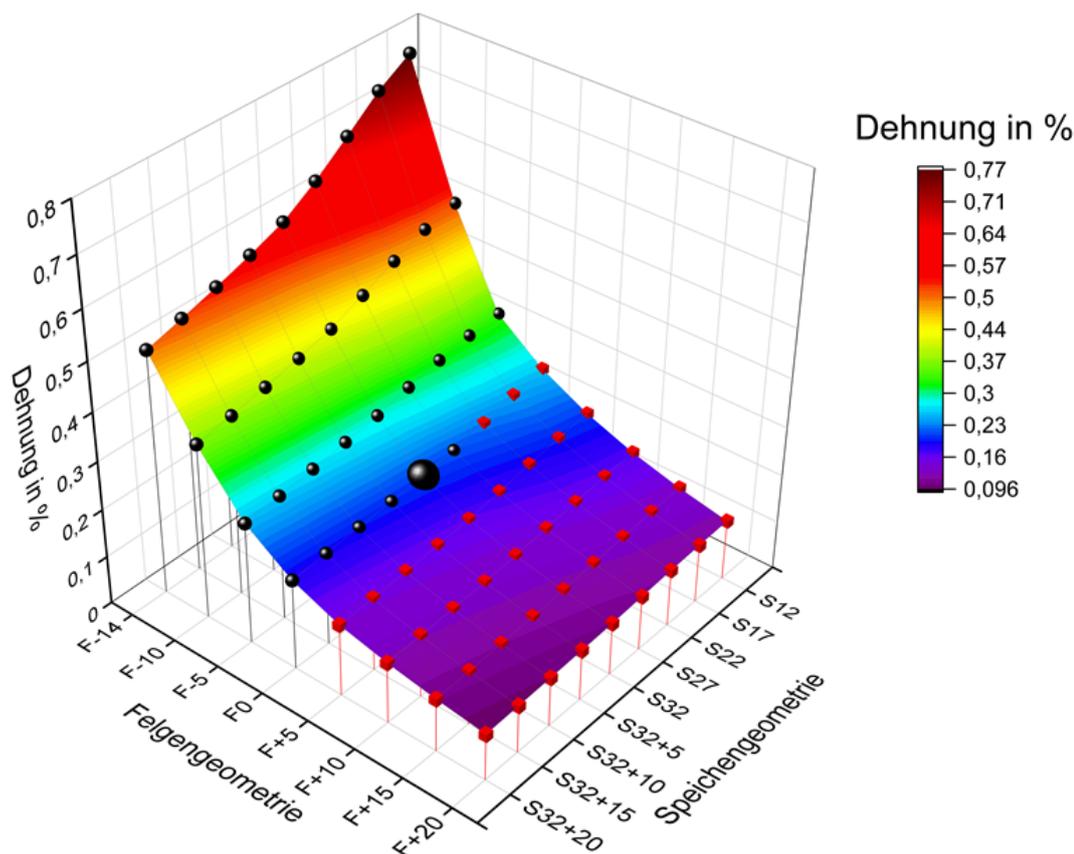
### 6.3 Einfluss des Felgen- und Speichenprofils

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Berechnung mit unterschiedlichen Speichen- und Felgenprofilen dargestellt. Die Geometrie der zu vergleichenden Speichen- und Felgenprofile wurden bereits in Kapitel 5.6.2 und 5.6.3 vorgestellt. Da die Spannung in den einzelnen Schichten eine lineare Abhängigkeit zur Dehnung aufweist, stellt die Dehnung an der äußeren Laminatgrenze eine geeignete Größe zum Vergleich der unterschiedlichen Varianten dar. Bei der Berechnung mit und ohne Bremskraft zeigte sich, dass die Dehnungen mit Bremskraft höher ausfallen als ohne. Aus diesem Grund wird der Vergleich von unterschiedlichen Felgen- und Speichengeometrien ausschließlich mit anliegender Bremskraft betrachtet.

Für die folgenden beiden Diagramme; Diagramm 4 und Diagramm 5, sind jeweils nur die maximalen Dehnungen bzw. Stauchungen des gesamten Laufrads aufgetragen. Die Diagramme stellen dabei die Maximalwerte jeder möglichen Kombination der beschriebenen Speichen- und Felgenprofile dar. Ist im Folgenden von einer Verkleinerung der Speichengeometrie die Rede, ist damit die Richtung von „S32+20“ nach „S12“ gemeint. Ist dagegen von einer Verkleinerung der Felgengeometrie die Rede, ist die Richtung „F+20“ nach „F-14“ gemeint. Eine Vergrößerung beschreibt jeweils die entgegengesetzte Richtung.

In Diagramm 4 sind die maximalen Dehnungen der möglichen Felgen- und Speichen-Geometrie-Kombinationen dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die geringste Dehnung bei der Kombination „F+20 / S32+20“ eintritt und 0,096 % beträgt. Die Größte Dehnung tritt bei der Kombination „F-14 / S12“ ein und beträgt 0,77 %. Wird die Speichengeometrie verkleinert, ist bei großen und mittleren Felgengeometrien nur ein leichter Anstieg der Dehnung erkennbar. Ein deutlicher Anstieg ist erst bei den Felgenrößen „F-14“ und „F-10“ erkennbar. Betrachtet man die Dehnungen bei Felgenverkleinerung, sieht man, dass die Dehnungen bis „F0“ nur leicht ansteigen, von „F0“ bis „F-14“ allerdings immer stärker zunehmen.

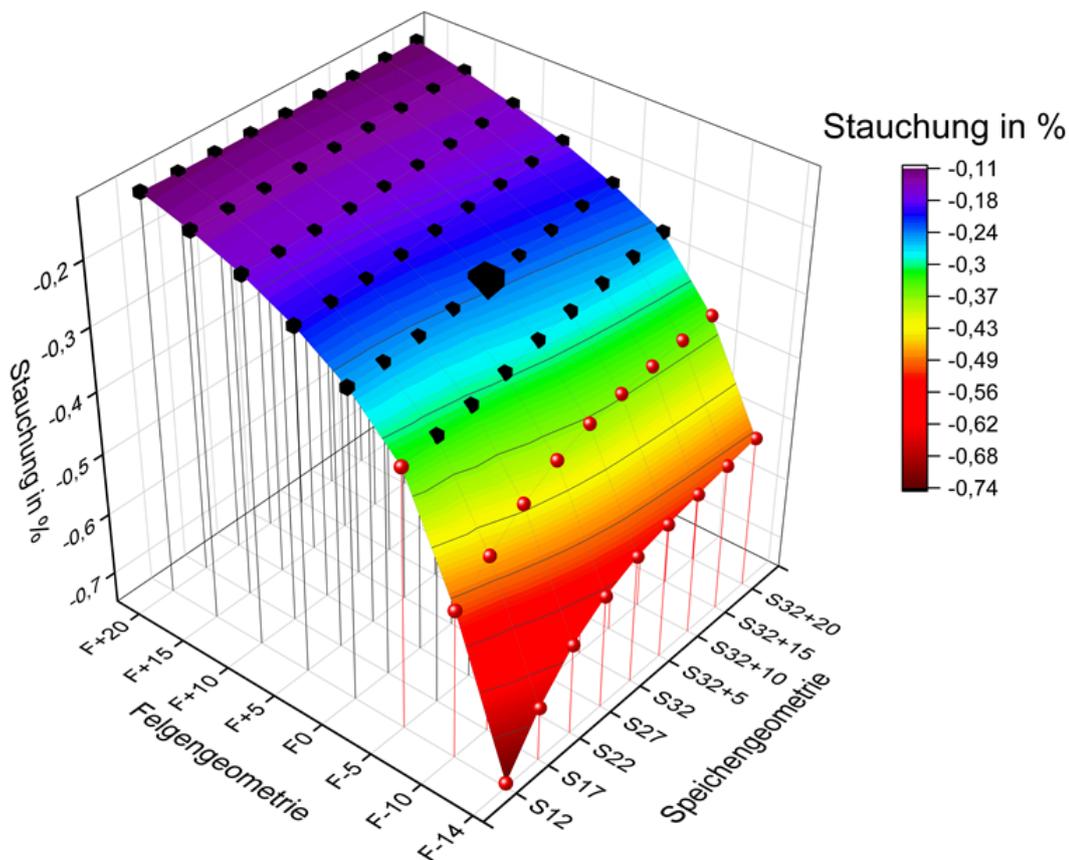
Grundsätzlich sind alle hier aufgetragenen, maximalen Dehnungen im Laufrad, im Felgenabschnitt 9 zu finden. Dabei treten sie an der Stelle  $\varphi_9 = 0$  „Innen“ oder  $\varphi_9 = 36^\circ$  „Außen“ auf. Ist die Stelle maximaler Dehnung im Laufrad  $\varphi_9 = 0$  „Innen“ wird diese durch einen roten Quader im Diagramm markiert. Ist die Stelle maximaler Dehnung im Laufrad an der Stelle  $\varphi_9 = 36^\circ$  „Außen“ wird diese durch eine schwarze Kugel markiert. Beim Ausgangsprofil „F0 / S32“ ist das entsprechende Symbol vergrößert dargestellt.



**Diagramm 4 Maximale Stauchung im gesamten Laufrad bei unterschiedlichen Felgen- und Speichen-geometrien. Daten siehe Anhang B.12. [Eigene Darstellung]**

Diagramm 5 stellt das Gegenstück zu Diagramm 4 dar. In Diagramm 5 sind die maximalen Stauchungen aufgetragen. Für eine bessere Darstellung wurde dieses Diagramm gegenüber Diagramm 4 um  $180^\circ$  gedreht, das heißt dass die Achsen der Felgen- und Speichenprofile genau entgegengesetzt verlaufen. Die Felgen- und Speichenkombination „F-14 / S12“ zeigt auch hier das Maximum. In diesem Fall ist das Maximum der Stauchung von  $-0,74\%$ . Betrachtet man den Verlauf und die Werte des Diagramms betragsmäßig, ist eine starke Ähnlichkeit zu Diagramm 4 zu erkennen. Ähnlich Diagramm 4 steigen die Stauchung von „F+20“ bis „F0“ zunächst nur leicht, ab „F-5“ bis „F-14“ jedoch zunehmend stärker. Auch der Einfluss von unterschiedlichen Speichengeometrien ist von „F+20“ bis „F0“ zunächst nur sehr gering, erst ab „F-5“ zeigt sich, dass eine Verkleinerung der Speiche zu einer deutlichen Erhöhung

der Stauchung führt. Das Minimum der Stauchung erfährt das Laufrad bei der Kombination „F+20 / S32+20“.



**Diagramm 5 Maximale Stauchung im gesamten Laufrad bei unterschiedlichen Felgen- und Speichen-geometrien. Daten siehe Anhang B.12. [Eigene Darstellung]**

Auch in Diagramm 5 sind grundsätzlich alle aufgetragenen, maximalen Dehnungen im Laufrad, im Felgenabschnitt 9 zu finden. Dabei treten sie an der Stelle  $\varphi_9 = 0$  „Außen“ oder  $\varphi_9 = 36^\circ$  „Innen“ auf. Ist die Stelle maximaler Stauchung im Laufrad  $\varphi_9 = 0$  „Außen“, wird diese durch einen schwarzen Quader im Diagramm markiert. Ist die Stelle maximaler Dehnung im Laufrad an der Stelle  $\varphi_9 = 36^\circ$  „Innen“ wird diese durch eine rote Kugel markiert. Beim Ausgangsprofil „F0 / S32“ ist das Symbol vergrößert dargestellt.

Die folgende Tabelle soll verdeutlichen, wie die Punkte maximaler Dehnung und Stauchung in den Diagrammen Diagramm 4 und Diagramm 5, sich durch Farbe und Form unterscheiden lassen. Zudem stellt die Tabelle dar, was die Farben und Formen über die Stelle im Laufrad aussagen.

Tabelle 13 Definition der Farbe und Form der Markierungen in den Diagrammen Diagramm 4 und Diagramm 5.

„Innen“		$\varphi_9 = 0^\circ$	 (Quader)
„Außen“		$\varphi_9 = 36^\circ$	 (Kugel)

Im Anhang B.14 werden die Dehnungsverläufe der vier Maximalkombinationen aus Felgen- und Speichenprofil: „F+20 / S32+20“, „F+20 / S12“, „F-14 / S32+20“ und „F-14 / S12“ nochmals detailliert dargestellt.

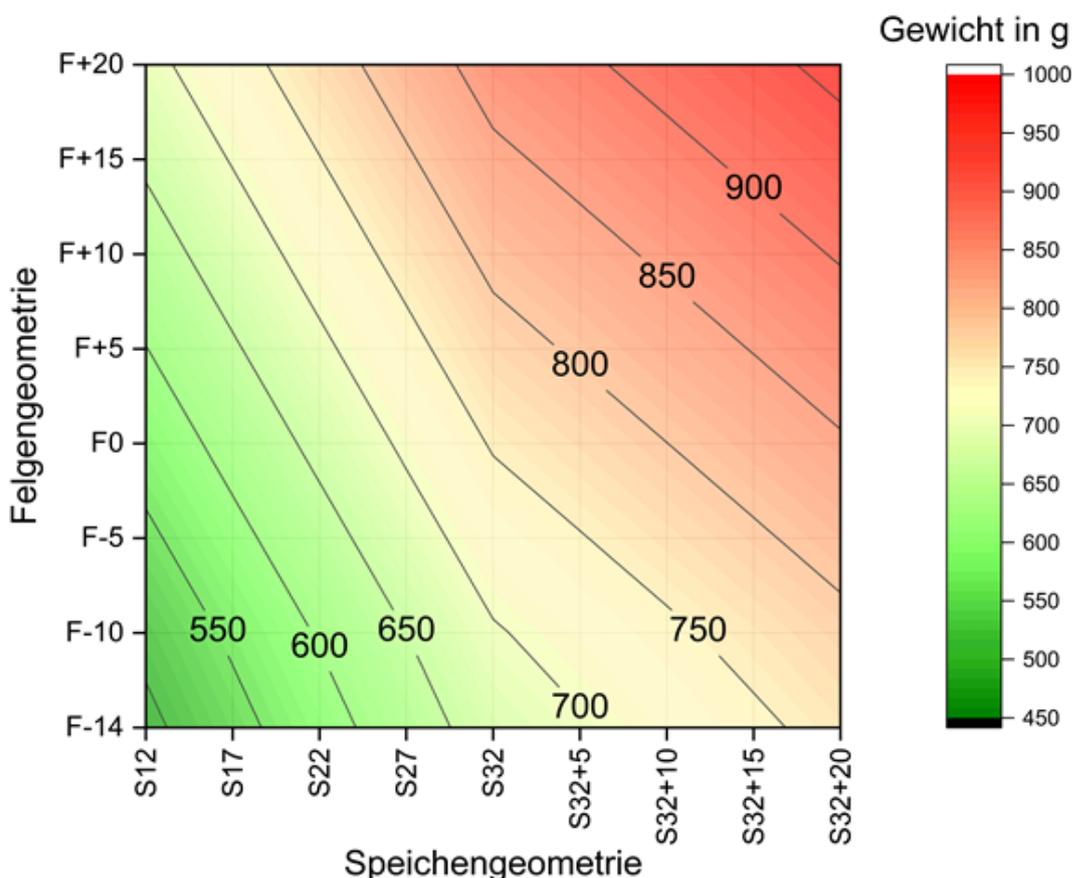


Diagramm 6 Masse des gesamten Laufrades in Abhängigkeit von Felgen- und Speichengeometrie. Daten siehe Anhang B.13.

Da die Anpassung des Speichen- und Felgenprofils einen Einfluss auf die Masse des Laufrads hat, wird in Diagramm 6 das Gewicht des gesamten Laufrads bei den unterschiedlichen Speichen- und Felgenprofilkombinationen dargestellt. Da die Laufradgeometrie nicht exakt beschrieben werden kann, stellt die hier beschriebene Masse nur eine grobe Näherung dar. Zur Unterscheidung der unterschiedlichen Varianten ist dies jedoch ausreichend. Die Masse

berechnet sich aus den Querschnittsgeometrien der einzelnen Schichten sowie dessen Dichte, multipliziert mit der Summe aus Speichenlänge sowie Felgen-Bogenlänge.

Für die Basisgeometrie „F0 / S32“ ergibt sich somit eine Masse von 754 g. Das so berechnete Gewicht scheint durch den Vergleich mit der vom Hersteller „Xentis“ angegebenen Masse von ca. 1700g pro Laufradsatz grundsätzlich plausibel.

Diagramm 6 zeigt, dass das Laufrad bei der Kombination „F-14 / S12“ die geringste Masse aufweist. Die Masse beträgt an dieser Stelle 489 g. Die maximale Masse wird mit der Kombination „F+20 / S32+20“ erreicht und beträgt 962 g. Mit größer werdender Speiche oder größere werdender Felge wird die Masse gleichmäßig größer. Jedoch zeigt die Felgenvergrößerung einen etwas größeren Einfluss auf die Massenzunahme.

#### 6.4 Einfluss des Laminataufbaus

Im Folgenden werden die Ergebnisse dargestellt, die sich bei einer Reduktion der UD-Schichtenanzahl ergeben. Hierzu wurde die Basisgeometrie „F0 / S32“ beibehalten.

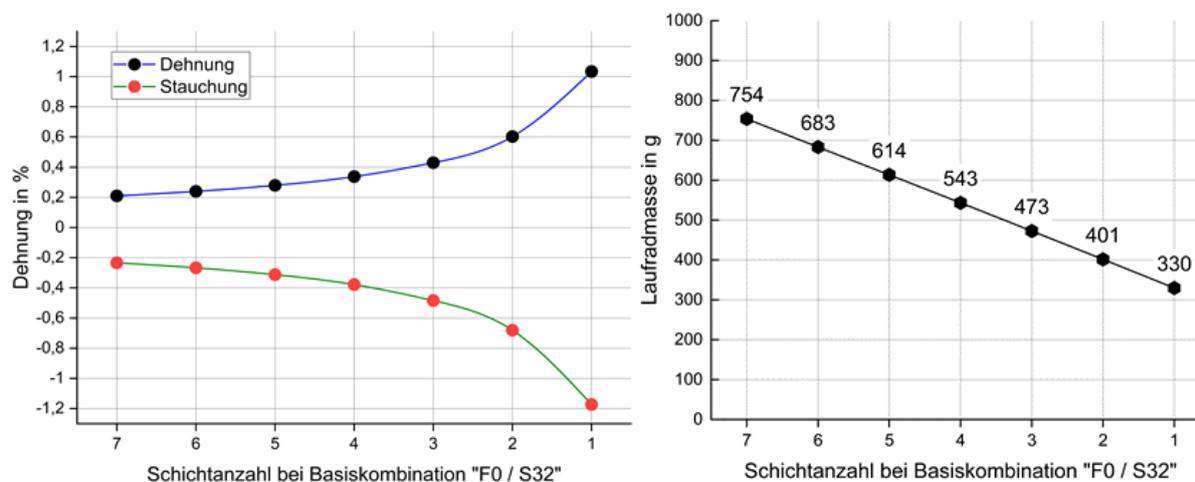


Diagramm 7 Links: Maximale Dehnung und Stauchung im Laufrad bei unterschiedlicher Anzahl von UD-Schichten. Rechts: Laufradmasse bei unterschiedlicher Anzahl von UD-Schichten.

Zur Untersuchung des Einflusses des Laminataufbaus wird, wie bei den anderen Varianten ebenfalls, lediglich die maximale Dehnung und Stauchung im Laufrad betrachtet. Diese beiden Werte sind in Diagramm 7 links aufgetragen.

Das Diagramm zeigt die maximalen Dehnungen und Stauchungen bei einer unterschiedlichen Anzahl an UD-Schichten. Die schwarzen Punkte sollen eine Dehnung „Außen“ bei  $\varphi_9 = 36^\circ$  darstellen. Die roten Punkte beschreiben die Stauchung „Innen“ bei  $\varphi_9 = 36^\circ$ . Es zeigt, dass die Dehnungen und Stauchungen immer an der gleichen Laufrad-Stelle maximal sind. Dies ist

unabhängig von der Anzahl der UD-Schichten. Die Dehnungen und Stauchungen nehmen mit abnehmender Anzahl von UD-Schichten zu, zunächst nur langsam, dann immer stärker. Dabei sind die Verläufe nahezu symmetrisch zur 0-Linie. Die Stauchung ist grundsätzlich etwas höher als die Dehnung. Die Dehnung und Stauchung ist bei nur einer UD-Schicht am größten, bei sieben UD-Schichten am geringsten. Bei sieben UD-Schichten beträgt die Dehnung 0,210 %, die Stauchung  $-0,233$  %. Bei nur einer Schicht beträgt die Dehnung 1,034 % und die Stauchung  $-1,173$  %. Der Betrag der Dehnung und Stauchung nimmt von sieben UD-Schichten zu einer Schicht somit um den Faktor fünf zu. Im rechten Diagramm von Diagramm 7 ist zu sehen welchen Einfluss eine Schichtreduzierung auf die Laufradmasse hat. Das Laufrad weist die maximale Masse von 754 g bei sieben Schichten auf. Die Masse verringert sich nahezu linear von sieben Schichten bis zu einer Schicht. Die minimale Masse hat das Laufrad somit bei einer UD-Schicht, sie beträgt 330 g.

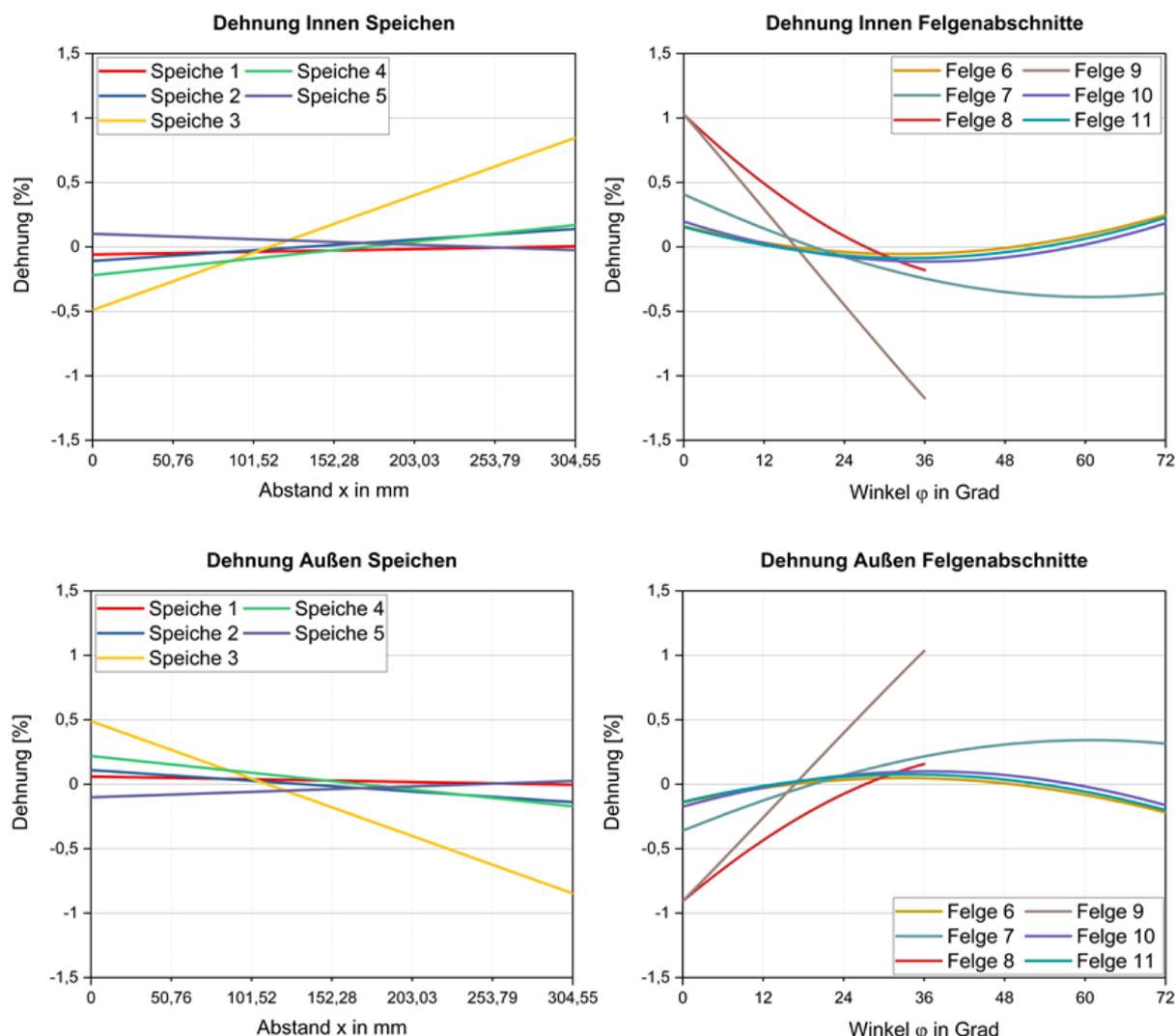


Diagramm 8 Dehnungsverläufe bei nur einer UD-Schicht. Die Verläufe zeigen die Dehnungen über den verschiedenen Laufradabschnitten. Es wird unterschieden zwischen den Dehnungen „Innen“ (oben) und „Außen“ (unten). [Eigene Darstellung]

Diagramm 8 zeigt die Dehnungsverläufe bei nur einer UD-Schicht. Wie die bisherigen Dehnungsverlaufsdiagramme zeigt auch diese oben die Dehnungen „Innen“ und unten die Dehnungen „Außen“ an den unterschiedlichen Speichen (links) und Felgenabschnitten (rechts). Es ist anzumerken, dass die Skalierung der Y-Achse gegenüber den bisherigen Diagrammen angepasst werden musste. Der Verlauf ähnelt dem bereits in Kapitel 6.2 vorgestellten sehr stark. Lediglich die Beträge weichen ab. Die Verläufe mit zwei bis sechs UD-Schichten zeigen ebenfalls keine nennenswerte Änderung. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle auf eine ausführliche Darstellung der weiteren Verläufe verzichtet.

## 7 Festigkeitsnachweis

Mit dem Festigkeitsnachweis soll festgestellt werden, ob das berechnete Laufrad den anliegenden Belastungen standhält. Die maximalen Beanspruchungen lassen sich am besten durch die maximalen Dehnungen und Stauchungen vergleichen. Aus den unterschiedlichen Varianten, die in den vorangegangenen Kapiteln berechnet wurden, werden in Tabelle 14 die Maximalwerte aufgeführt.

Tabelle 14 Maximale Dehnungen und Stauchungen aus den Berechnungsergebnissen von Kapitel 6.

Variante	max. Dehnung	max. Stauchung
Ohne Bremskraft	0,20 %	−0,18 %
Mit Bremskraft	0,21 %	−0,23 %
Felgen- und Speichengeometrievarianten	0,77 %	−0,74 %
Laminataufbauvarianten	1,03 %	−1,17 %

Die in Tabelle 14 aufgeführten Werte beziehen sich alle auf den Rand der äußersten Schicht. Diese Dehnungen und Stauchungen sind somit innerhalb des Querschnitts die Maximalwerte. In Abbildung 37 auf Seite 81 und Abbildung 38 auf Seite 83 ist der Verlauf der Dehnung im Querschnitt für die beiden Varianten „Ohne Bremskraft“ und „Mit Bremskraft“ nachvollziehbar. Ersichtlich ist dort, dass die maximale Dehnung bzw. Stauchung in der Gewebesicht nur minimal gegenüber der maximalen Dehnung bzw. Stauchung in der UD-Schicht abweicht. Zur Vereinfachung werden deshalb für den Festigkeitsnachweis nur die maximale Dehnung und Stauchung aus Tabelle 14 genutzt.

Um einen ausführlichen und aussagefähigen Festigkeitsnachweis durchführen zu können, werden die Festigkeitswerte der einzelnen Schichten bzw. des Gesamtlaminats benötigt. Da diese von Lieferanten nicht vorgegeben werden und auch von ähnlichen Laminaten keine Vergleichswerte aus der Literatur zu finden sind, muss ein Alternativer Ansatz gewählt werden. Die korrekte Vorgehensweise, um belastbare Ergebnisse zu bekommen, ist allerdings das Durchführen von Versuchen um die Festigkeit des Laminats zu bestimmen (siehe auch Kapitel 3.4.4). Dies ist im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich, sollte aber zwingend nachgeholt werden.

Um dennoch eine erste Aussage über die Festigkeit des Laufrads machen zu können, wird ein möglichst konservativer Ansatz gewählt. Die zwei grundlegenden Versagensarten sind Faserbruch und Zwischenfaserbruch (siehe auch Kapitel 3.4.3 und 3.4.4). Da die Festigkeitswerte für die Faser und das Matrixmaterial an sich bekannt sind, kann die Spannung in Folge der Dehnung berechnet und mit den Festigkeitswerten verglichen werden. Dazu wird der Maximalwert der Dehnung mit dem jeweiligen E-Modul multipliziert. Dies führt zur Spannung.

Tabelle 15 Gegenüberstellung der Spannungen aufgrund der maximalen Dehnung und der Zugfestigkeitswerte von Matrixwerkstoff und Fasermaterial.

	<b>max. Dehnung</b>	<b>E-Modul</b>	<b>Spannung</b>	<b>Zugfestigkeit</b>
Matrix	1,03 %	3.190 N/mm <sup>2</sup>	33 N/mm <sup>2</sup>	83 N/mm <sup>2</sup>
Faser		242.000 N/mm <sup>2</sup>	2.493 N/mm <sup>2</sup>	4.137 N/mm <sup>2</sup>

In Tabelle 15 sind die maximalen Spannungen infolge der maximalen Dehnung und dem entsprechenden E-Modul von Matrix bzw. Faser aufgetragen. Zusätzlich sind die Zugfestigkeitswerte des Herstellers von Matrix und Faser aufgelistet. Der Vergleich zwischen Spannung und Zugfestigkeit zeigt, dass selbst bei nur einer einzigen UD-Laminatschicht noch ausreichende Festigkeit bei der angenommenen Belastung gegeben ist. Die maximalen Spannungen in der Matrix quer zur Faserrichtung werden nur in der Gewebeschicht auftreten. Aufgrund der  $\pm 45^\circ$  Anordnung des Gewebes werden diese geringer ausfallen als in der Tabelle dargestellt. Da allerdings aufgrund der Dehnungsvergrößerung bei Querkzug-Beanspruchung die Festigkeitswerte deutlich absinken, ist ein ähnlich großes Verhältnis von Spannung zu Dehnung zu erwarten. [2, S. 373]

Da der Versagensfall; Versagen durch Druckbelastung längs zur Faser, in der Regel nicht vorkommt, sondern vorher bereits Stabilitätsversagen auftritt, werden die Stauchungen an dieser Stelle nicht genauer betrachtet. Die Druckfestigkeiten der Matrix sind deutlich größer als die Zugfestigkeiten. Aus diesem Grund werden die Druckbelastungen quer zur Faser nicht weiter betrachtet. [2, S. 350] [2, S. 376]

Alle weiteren Berechnungsvarianten mit geringeren Dehnungen bzw. Stauchungen werden als unkritisch angesehen, was die Festigkeit gegenüber den angenommenen Belastungen angeht. Da für einen aussagefähigen Festigkeitsnachweis die tatsächlichen Festigkeitswerte aus Versuchen benötigt werden, sei an dieser Stelle nochmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die oben dargestellte Festigkeitsanalyse nur als erste Näherung zu verstehen ist!

## 8 Ergebnis

Das Ergebnis dieser Arbeit teilt sich im Wesentlichen auf drei unterschiedliche Punkte auf. Zum einen das Ergebnis der Berechnungsmethode sowie der geforderten Möglichkeit, mit einem Computer-Algebra-Programm, verschiedene Varianten durch Parameteränderung berechnen zu können. Zum anderen wird gezeigt was als der ideale Kompromiss aus Masse und Steifigkeit des Laufrads aufgrund der Berechnungsergebnisse erscheint. Zuletzt soll das Ergebnis des Festigkeitsnachweises beleuchtet werden. Dabei soll darauf eingegangen werden, warum keine umfassende und belastbare Festigkeitsanalyse im Rahmen dieser Arbeit möglich ist.

### 8.1 Berechnungsmethode

Die Berechnung aus Kombination von klassischer Laminattheorie, Berechnung für Verbundquerschnitte sowie dem Prinzip der virtuellen Kräfte liefert plausible Werte für Dehnungen und Spannungen im gesamten Laufrad. Auch die Höhe sowie die Richtung der Dehnungen und Spannungen ist nachvollziehbar. Grundsätzlich sind die Dehnungen bzw. somit auch die Spannungen an dem Felgenteil am größten, an dem auch die äußere Kraft anliegt. Die Berechnungsergebnisse ohne Bremskraft zeigen eine symmetrische Verteilung der Dehnungen auf der linken und rechten Seite des Laufrads. Infolge der zusätzlichen Bremskraft ist die Verteilung nicht mehr symmetrisch.

Wird das Laufrad mit weniger UD-Schichten oder Querschnitten mit geringerem Flächenträgheitsmoment berechnet, erhöht sich die Dehnung und Spannung im gesamten Laufrad. Wird das Laufrad dagegen mit Querschnitten berechnet, die ein höheres Flächenträgheitsmoment aufweisen, verringert sich die Dehnung und Spannung in allen Teilen des Laufrads.

Das Berechnungsprogramm in Maxima ist so gestaltet, dass es möglich ist, durch die Anpassung von verschiedenen Parametern unterschiedlichste Varianten zu berechnen. Dies zeigt sich an der ausführlichen Variantenbetrachtung mit und ohne Bremskraft, verschiedenen Speichen- und Felgenprofilen und dem unterschiedlichen Laminataufbau. Die daraus berechneten Werte weichen von unterschiedlichen Varianten geringfügig voneinander ab und folgen stets einem bestimmten Trend.

---

Es lässt sich feststellen, dass die Normalkräfte nur einen sehr geringen Einfluss auf die Dehnungen und somit auch Spannungen haben. Dies ist dadurch ersichtlich, dass die Dehnungen und Stauchungen in einem Profilquerschnitt vom Betrag her nahezu identisch sind.

Bezüglich eines einzelnen Berechnungsdurchlaufs mit dem Programm Maxima lässt sich feststellen, dass eine Berechnungsschleife etwa 4 Minuten dauert. Besonders das Lösen großer Gleichungen und das Erstellen von Grafiken stellt sich als zeitaufwändig heraus.

## 8.2 Idealer Kompromiss aus Masse und Steifigkeit

Zur Feststellung des idealen Kompromisses aus Gewicht und Steifigkeit des Carbon-Laufrades werden die Berechnungsergebnisse der Speichen- und Felgenprofilvarianten sowie der Variante des Laminataufbaus herangezogen. Somit sind es ausschließlich Varianten die „mit Bremskraft“ berechnet sind. Da die Festigkeitsanalyse als erste Näherung zeigt, dass alle Varianten eine ausreichende Festigkeit aufweisen, wird die Festigkeit als begrenzendes Merkmal ausgeschlossen.

Grundsätzlich ist erkennbar, dass die Masse bei geringeren Querschnitten sowie bei einer geringeren Anzahl von UD-Schichten kleiner wird. Dies führt bei der Variante mit nur einer einzigen UD-Schicht zu einer minimalen Masse von ca. 330 g pro Laufrad. Die geringste Masse bei den Felgen- und Speichenvarianten zeigt die Variante „F-14 / S12“ mit ca. 450 g.

Die Dehnungen geben Auskunft über die Steifigkeit des Laufrads und sind gegenüber der Masse gegenläufig. Das bedeutet, je geringer die Masse ist, desto höher ist die Steifigkeit des Laufrads. Diese Tatsache ist aus den Diagrammen 4, 5, 6 und 7 aus Kapitel 6 ersichtlich.

Da die Speichen grundsätzlich weniger belastet sind als die Felge, insbesondere die Felgenbereiche 8 und 9, hat eine Reduzierung der Speichengeometrie keinen nennenswerten Einfluss auf die Steifigkeit. Erst wenn die Felgengeometrie so schwach ausgeführt ist, dass mehr Kräfte und Momente über die Speichen aufgenommen werden müssen, zeigt sich ein deutlicher Einfluss durch eine Reduktion der Speichengeometrie.

Die Basisauslegung „F0 / S32“ ist bezüglich Steifigkeits- und Massekompromisses bereits eine gute Näherung. Eine sinnvolle Reduzierung der Masse, bei nur geringem Abfall der Steifigkeit, bietet die Reduzierung der Speichengeometrie auf „F0 / S12“. Die Masse verringert sich dabei um knapp 25 % von 754 g auf 570 g. Die Dehnung steigt um etwa 24 % von 0,21 % auf 0,26 % an. Die Stauchung dagegen lediglich um knapp 9 % von  $-0,23$  % auf  $-0,25$  %. Eine Verringerung der Felgengeometrie ist an dieser Stelle nicht ratsam. Die Verringerung auf „F-5 / S12“ würde zur Folge haben, dass die Dehnungen und Stauchungen jeweils nochmals um ca. 32 % ansteigen würden. Die Masse würde sich allerdings nur um 5 % reduzieren. Zwischen „F0 /

S27“ und „F0 / S22“ wechselt bei der Dehnung die Stelle, an der die maximale Dehnung im gesamten Laufrad auftritt (siehe Diagramm 4 in Kapitel 6.3). Die Stelle wechselt innerhalb des Felgenabschnittes 9 von  $\varphi_9 = 36^\circ$  auf  $\varphi_9 = 0^\circ$ . Dies zeigt, dass in diesem Bereich die Belastung im Laufrad relativ gut verteilt ist. Der Punkt „F0 / S12“ liegt in der Nähe dieses Übergangs und stellt somit eine relativ gute Gleichverteilung im Felgenabschnitt dar.

Ein weiterer Ansatz um gegenüber der Basisgeometrie „F0 / S32“ die Masse zu verringern und dabei nur wenig Steifigkeit einzubüßen, zeigt sich in der Reduktion der Anzahl von UD-Schichten. Die Berechnungsergebnisse zeigen, dass eine Reduktion der UD-Schichten auf 4 Stück sinnvoll erscheint. Die Dehnungen und Stauchungen steigen von 7 Schichten bis auf 4 bis 5 Schichten zunächst nur leicht an. Danach ist ein größerer Anstieg der Dehnungen und Stauchungen zu verzeichnen (siehe Diagramm 7 in Kapitel 6.4). Die Masse verringert sich dagegen je Schicht nahezu linear um jeweils etwa 70 g. Durch reine Schichtreduktion auf bis zu 4 UD-Schichten ist bei einer Dehnung von 0,34 % und einer Stauchung von  $-0,38\%$  eine Masse von 543 g erzielbar. Die erzielte Masse durch Reduktion der UD-Schichten (auf 4 Schichten), liegt somit um knapp 5 % unter der Masse, die bei der Anpassung der Geometrie auf „F0 / S12“ vorliegt. Die Dehnungen allerdings liegen um 31 % und die Stauchungen sogar um 52 % darüber (siehe Tabelle 16).

Tabelle 16 Vergleich der Dehnungen und Massen von Variante „F0 / S12“ (sieben UD-Schichten) und Variante „F0 / S32“ mit vier UD-Schichten

	Dehnung	Stauchung	Masse
„F0 / S12“	0,26 %	$-0,25\%$	570 g
„F0 / S32“ mit 4 UD Schichten	0,34 %	$-0,38\%$	543 g
Abweichung der unteren Variante gegenüber der oberen	+31 %	+52 %	$-4,7\%$

Eine Schichtreduktion führt somit zu einem verhältnismäßig schlechteren Ergebnis, als die Anpassung auf die Geometriekombination „F0 / S12“.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Geometrievariante „F0 / S12“ als die zielführendste Variante, bezüglich eines Kompromisses aus Steifigkeit und Masse, angesehen werden kann. Eine Optimierung des Gewichts bei gleichzeitigem geringem Anstieg der Dehnungen kann erwartet werden, wenn die Geometrievariante „F0 / S12“ zusätzlich mit einer Schichtreduktion um ein bis max. zwei UD-Schichten kombiniert wird. Die Bewertung stützt sich dabei allerdings grundsätzlich nicht auf maximal zulässige Dehnungen des Laufrads, sondern stellt lediglich Änderungen im Verhältnis zur Ausgangsgeometrie „F0 / S32“ gegenüber.

### 8.3 Festigkeitsnachweis

Aufgrund fehlender Festigkeitswerte der eingesetzten Materialien kann der Festigkeitsnachweis nur unzureichend durchgeführt werden. Der Ansatz, durch die maximal berechneten Dehnungen und dem E-Modul der Faser sowie der Matrix auf die Spannungen zu schließen, ist sehr konservativ. Die so berechneten maximalen Spannungen werden mit den Festigkeitswerten der reinen Faser sowie dem Festigkeitswert der reinen Matrix verglichen.

Das Ergebnis der so durchgeführten Betrachtung zeigt, dass selbst die größten Dehnungen, die im Falle der Variante „Laminataufbau“ mit nur einer UD-Schicht auftreten, zu Spannungen führen, die deutlich geringer sind als die Zugfestigkeitswerte. Bei der Matrix erhält man einen Sicherheitsfaktor von ca. 2,5 und bei der Faser von ca. 1,7. Da alle gegenseitigen, festigkeitsmindernden Einflüsse von Matrix und Faser bei dieser Betrachtungsweise nicht berücksichtigt werden können, sind diese Werte und der gesamte Festigkeitsnachweis lediglich als erste grobe Abschätzung zu interpretieren.

An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass es für einen vollumfänglichen Festigkeitsnachweis Voraussetzung ist, die Festigkeitskennwerte anhand von Materialproben versuchsseitig zu bestimmen. Erst wenn diese Festigkeitswerte vorliegen, kann eine gezielte, schichtweise Festigkeitsanalyse durchgeführt werden. Daraufhin lässt sich der Laminataufbau nochmals optimieren. Da die Belastungen nur in einer Ebene angenommen werden, wird sich für die Fasern der äußersten Gewebeschicht nur eine geringe Belastung ergeben. Die Gewebeschicht ist so ausgerichtet, dass sie gut geeignet ist, Torsionskräfte aufzunehmen. Torsionskräfte treten bei der zweidimensionalen Betrachtung, mit den in dieser Arbeit angenommenen Belastungen allerdings nicht auf. Somit wird diese Schicht nutzlos erscheinen, wird aber in der Realität bei einem Laufrad benötigt.

## 9 Diskussion, Fazit und Ausblick

Im letzten Kapitel dieser Arbeit werden die vorgestellten Ergebnisse diskutiert und ein Fazit über die Arbeit und dessen Ergebnisse gezogen. Als Abschluss wird ein Ausblick auf weiterführende Untersuchungen gegeben, unter anderem welche, die die Ergebnisse dieser Arbeit bestätigen sollen. Zudem wird dargestellt, wie diese Arbeit weitergeführt werden kann und welcher weitere grundsätzliche Forschungsbedarf auf diesem Gebiet besteht.

### 9.1 Diskussion

Der Fokus dieser Arbeit liegt in der Anwendung der klassischen Laminattheorie in Verbindung mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte sowie der Berechnung für Verbundquerschnitte mit Hilfe

---

eines Computer-Algebra-Programms. Der Berechnungsansatz funktioniert für das 5-speichige Carbonlaufrad gut und liefert plausible Werte für die inneren Beanspruchungen sowie die damit zusammenhängenden Dehnungen und Spannungen. Da keine vergleichbaren Berechnungen mit anderen Methoden vorliegen, kann kein direkter Vergleich gezogen werden. Auch Versuche mit einem wie in dieser Arbeit dargestellten Laufrad liegen dem Autor nicht vor. Einziger Anhaltspunkt ist, dass die Basisgeometrie des Laufrads in sehr ähnlicher Form auf dem Markt verkäuflich ist und somit bereits eine entsprechende Festigkeit aufweisen sollte. Allerdings ist der Laminataufbau dieser erhältlichen Felge nicht bekannt. Aus diesen genannten Gründen ist es aus Sicht des Autors notwendig, zusätzlich eine alternative Berechnungsmethode heranzuziehen und nach Möglichkeit die Ergebnisse in Versuchen zu bestätigen. Nur so kann abschließend bewertet werden, ob die Ergebnisse korrekt sind und die angewendeten Methoden für diese Untersuchung sinnvoll sind.

Ein grundsätzliches Problem stellt die Vereinfachung des Laufrads für die Berechnung dar. Übergangsbereiche zwischen Felge und Speiche sowie Speichen und Nabe können nicht realitätsnah berücksichtigt werden. Die Felge wird als durchgängiges Profil über den kompletten Umfang angenommen, die Speichen verlaufen mit gleichbleibendem Querschnitt von Nabemittelpunkt bis zur neutralen Faser. Dies bildet die Realität nicht exakt ab. Um solche Übergangsbereiche genau betrachten zu können, müsste auf eine andere Berechnungsmethode gewechselt werden. Grundsätzlich kann aber sicherlich eine erste Aussage mit der in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungsmethode getroffen werden. Da allerdings in der Regel genau der Übergangsbereich zwischen Speiche und Felge, der am höchsten beansprucht ist, wird dringend empfohlen diesen exakter zu untersuchen.

Ein weiterer Einfluss, der mit der durchgeführten Berechnung nicht betrachtet wird, sind laterale Kräfte, welche auf das Laufrad wirken. Zusätzlich kommen Stoßbelastungen durch Sprünge mit dem Fahrrad oder durch Unebenheiten des Untergrundes hinzu. Soll das Laufrad auf maximalen Leichtbau getrimmt werden, ist es zwingend erforderlich alle anliegenden Belastungen exakt zu kennen. Zusätzlich müssen Umwelteinflüsse wie Temperatur und Luftfeuchtigkeit mitberücksichtigt werden. Nur wenn alle Einflüsse und Belastungen auf das Laufrad bekannt sind, kann dieses durch Berechnungen optimal ausgelegt werden. Da Berechnungen allerdings in der Regel nie ohne Annahmen auskommen, weisen die Ergebnisse immer eine gewisse Unschärfe auf.

Die Berechnungsergebnisse bezüglich der Geometrievarianten-Kombinationen und des Laminataufbaus zeigen recht klar, wie sich die Steifigkeit und die Masse des Laufrads bei Änderungen verhält. Die Bewertung für den optimalen Kompromiss aus Steifigkeit und Masse lässt sich allerdings nur anhand von Vergleichen durchführen. Da es keine Werte für eine anzustrebende Steifigkeit bzw. Masse gibt, ist die Festlegung der optimalen Geometrie, nur durch die

---

Betrachtung der Ergebnisse und deren Abweichungen zueinander möglich. Da die Geschwindigkeiten bei Mountainbikes eher gering sind, sind wenige Gramm Masseinsparung kaum zu spüren. Xentis legt seine Laufradgeometrie teilweise so aus, dass die Felgen durch Ihre Form eine Art Feder darstellen und somit die Steifigkeit des gesamten Laufrads absichtlich reduzieren (siehe Tabelle 2 auf Seite 15, Laufraddesign 2). Welche Steifigkeiten und Massen tatsächlich anzustreben sind ist von daher nicht eindeutig. Eine Aussage darüber lässt sich vermutlich nur qualitativ in Form von Fahrversuchen treffen. Die Bewertung hängt jedoch auch vom jeweiligen eingesetzten Rahmen, bzw. Mountainbike an sich, Fahrer, Reifen etc. ab.

Die Festigkeitsanalyse des berechneten Laufrads kann nur unzureichend durchgeführt werden. Dies hat verschiedene Gründe. Zum einen liegen nicht alle Belastungen des Laufrads vor. Zum anderen stehen keine Festigkeitswerte des eingesetzten Materials zur Verfügung. Der zweite Punkt ist ausschlaggebend in dieser Arbeit. Durch die fehlenden Festigkeitswerte kann keine korrekte Aussage darüber gemacht werden, ob das Laufrad ausreichend dimensioniert ist. Der Versuch einer Festigkeitsanalyse mit Hilfe der Festigkeitswerte von Faser und Matrix separat, kann nur als erste Grobeinschätzung dienen. Die gegenseitige Beeinflussung der Faser und Matrix bleibt bei dieser Betrachtungsweise gänzlich unberücksichtigt. Die Festigkeitswerte des Materials sind für eine korrekte Festigkeitsanalyse des Laufrads zwingend in Versuchen zu ermitteln. Alternativ besteht die Möglichkeit direkt ein Prototyp des Laufrads zu bauen und mit den entsprechenden Belastungen zu testen. Diese Vorgehensweise würde allerdings nicht dazu beitragen, das Laufrad optimieren zu können, wenn es nicht zum Versagen des Prototyps kommt. Zudem wären die Kosten für verschiedene Varianten erheblich höher.

## 9.2 Fazit

Diese Arbeit greift auf viele unterschiedliche Bereiche der technischen Mechanik sowie der klassischen Laminattheorie zurück. Die Einarbeitung und Verknüpfung der unterschiedlichen Bereiche miteinander stellten sich zu Beginn als sehr komplex dar. Im Rahmen dieser Arbeit ist es gelungen diese verschiedenen Bereiche so zu verknüpfen, dass ein 5-speichiges Vollcarbon-Laufrad unter den gegebenen Randbedingungen berechnet werden kann. Die mit Maxima erstellte Berechnung ist durch Änderung von Ausgangsparametern leicht änderbar. Dies lässt einen zügigen Vergleich von unterschiedlichen Varianten zu. Der so berechnete optimale Kompromiss aus Steifigkeit und Masse liegt in der Speichen-Felgen-Geometriekombination „F0 / S12“ mit insgesamt 7 UD-Schichten. Bei dieser Kombination treten maximale Dehnungen von 0,26% und Stauchungen von  $-0,25\%$  auf. Die Masse beträgt pro Laufrad 570 g.

Diese Arbeit kann nicht alle Einflüsse und Belastungen auf das Laufrad exakt berücksichtigen. Das Laufrad weist für die Berechnung eine vereinfachte Geometrie auf. Auch die angreifenden

Kräfte müssen vereinfacht dargestellt werden. Dies führt dazu, dass die Ergebnisse für die auftretenden Dehnungen und Spannungen mit einer gewissen Unschärfe behaftet sind. Dennoch geben sie einen guten Überblick über die grundsätzliche innere Beanspruchungsverteilung und -höhe im Laufrad. Des Weiteren kann der Einfluss von Belastungs-, Geometrie- und Laminatänderungen sehr gut miteinander verglichen werden.

Die einzelnen Materialeigenschaften lassen sich mit den Angaben vom Hersteller und der klassischen Laminattheorie relativ exakt bestimmen. Die Festigkeitswerte sind stark abhängig von der Verarbeitung des Materials und des Laminataufbaus. Festigkeitswerte liegen für das eingesetzte Material nicht vor. Dies führt dazu, dass die Festigkeitsanalyse nur unzureichend durchgeführt werden kann. Für die korrekte Durchführung sind zwingend Festigkeitswerte aus Versuchen notwendig.

### 9.3 Ausblick

Die Ergebnisse dieser Arbeit zeigen eine erste Einschätzung bezüglich der auftretenden Belastungen im Laufrad. Für weitere gezielte Optimierungen am Laufrad werden weiterführende Berechnungen bzw. Versuche benötigt. Aufgrund der relativ aufwendigen Rechnung wird vermutlich ein anderer Berechnungsansatz, beispielsweise die Finite Elemente Methode benötigt. Erstrebenswert wird sicherlich sein, die Speichen und die Felge bionisch zu optimieren. Das bedeutet, dass nur dort Material vorhanden sein sollte, wo es zwingend benötigt wird. Somit könnte womöglich weitere Masse eingespart werden. Für die genauen Berechnungen sind allerdings zunächst umfangreiche Untersuchungen bezüglich der tatsächlich auftretenden Belastungen am Laufrad notwendig. Höchstwahrscheinlich werden diese aber auch in Zukunft nicht alle exakt bestimmt werden können. Das führt dazu, dass auch weiterhin Laufräder überdimensioniert werden, um ausreichend Sicherheit gewährleisten zu können.

Durch die zahlreichen Hinweistexte im Maxima-Programm-Code lassen sich für einen geübten Maxima-Nutzer verschiedene Varianten relativ schnell abändern und berechnen. Einem ungeübten Nutzer wird dies allerdings schwerfallen. Aus diesem Grund wäre es hilfreich, eine Eingabemaske für die Parameteränderungen zu entwickeln. Zudem wäre eine Implementierung unterschiedlicher Speichenanzahl des Laufrads in das Programm denkbar. Diese sollte auch mit der Eingabemaske gesteuert werden können. In diesem Zusammenhang wäre es praktisch, direkt einen Vergleich der unterschiedlichen Varianten grafisch ausgeben lassen zu können. Diese Änderungen werden in der Zukunft nichts am eigentlichen Ergebnis ändern, würden aber die Anwendbarkeit deutlich erhöhen.

Weiterführende Arbeiten sollten die Festigkeitsanalyse in den Fokus stellen. Nur durch Versuche können entsprechende Festigkeitswerte des Laminats ermittelt werden. Diese

---

Festigkeitswerte können dann mit den in dieser Arbeit ermittelten Spannungen verglichen werden und eine entsprechende Optimierung der Laufradgeometrie bzw. des Laminataufbaus vorgenommen werden.

Um die in dieser Arbeit ermittelten Dehnungen überprüfen zu können, bietet es sich an, ein Prototyp erstellen zu lassen und diesen mit Hilfe von Versuchen zu überprüfen. Dies wird darüber Auskunft geben inwieweit die Rechnung korrekt ist. Ein Prototyp hätte zudem den Vorteil, dass an ihm bereits erste herstellungsbedingte Anforderungen gestellt werden. Diese führen zu einer genaueren Beschreibung einer umsetzbaren Geometrie, welche wiederum erneut der Berechnung zugeführt werden kann.

Im Rahmen der Literaturrecherche ist aufgefallen, dass wenig Literatur zum Thema Berechnung, Auslegung und Analyse von Profilen aus FVK vorhanden ist. Auch die versuchsseitige Untersuchung von solchen Profilen ist in der Literatur nicht zu finden. Dieses Gebiet scheint noch einiges an Forschungspotential zu bieten.

## Literaturverzeichnis

- [1] AVK–Industrievereinigung Verstärkte Kunststoffe e. V., Handbuch Faserverbundkunststoffe/Composites. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2013.
- [2] H. Schürmann, Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden, 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [3] R&G Faserverbundwerkstoffe GmbH, „Faserverbundwerkstoffe: Handbuch“, 06/2009. [Online]. Verfügbar unter: [www.r-g.de](http://www.r-g.de)
- [4] M. Flemming, G. Ziegmann und S. Roth, Faserverbundbauweisen: Fasern und Matrices. Berlin, Heidelberg, s.l.: Springer Berlin Heidelberg, 1995.
- [5] R&G Faserverbundwerkstoffe GmbH, Halbzeuge aus Faserkunststoffverbund. [Online]. Verfügbar unter: <https://shop1.r-g.de> (Zugriff am: 7. Juni 2020).
- [6] E. Brust, M. Gressmann und F. Herkendell, Fachkunde Fahrradtechnik, 7. Aufl., 2019.
- [7] Fahrräder – Sicherheitstechnische Anforderungen an Fahrräder – Teil 1: Begriffe (ISO 4210-1:2014); Deutsche Fassung EN ISO 4210-1:2014, DIN EN ISO 4210-1, 2014.
- [8] Fahrradreifen Faltreifen MTB Taipan Tubeless Ready Hardskin 27,5x2,80 (70mm 584). [Online]. Verfügbar unter: [https://www.decathlon.de/p/fahrradreifen-faltreifen-mtb-taipan-tubeless-ready-hardskin-27-5x2-80-70mm-584/\\_/R-p-X8511989](https://www.decathlon.de/p/fahrradreifen-faltreifen-mtb-taipan-tubeless-ready-hardskin-27-5x2-80-70mm-584/_/R-p-X8511989) (Zugriff am: 15. Mai 2020).
- [9] Triathlon Portal – triathlon.de, Scheibenrad Spezial: Flach, schnell und aerodynamisch | Triathlon Portal - triathlon.de. [Online]. Verfügbar unter: <https://www.triathlon.de/scheibenrad-spezial-flach-schnell-und-aerodynamisch-8692.html/2> (Zugriff am: 15. Mai 2020).
- [10] XENTIS carbon wheel technology - 100% in Österreich gefertigt. [Online]. Verfügbar unter: <https://xentis.com/?lang=de> (Zugriff am: 6. Juli 2020).
- [11] bike ahead composites, bike ahead composites. [Online]. Verfügbar unter: <https://bike-ahead-composites.de/startseite.html> (Zugriff am: 6. Juli 2020).
- [12] 'BIKE AHEAD COMPOSITES Laufradsatz 29. [Online]. Verfügbar unter: <https://r2-bike.com/BIKE-AHEAD-COMPOSITES-Laufradsatz-29-THEsixspoke-biturboRS-Disc-Carbon-Clincher-Center-Lock-15x110-mm-Steckachse-BOOST-12x148-mm-Steckachse-BOOST-11-12-fach-SRAM->
-

XD?gclid=Cj0KCQjwl4v4BRDaARIsAFjATPk\_c2LGVHlaR-ToS8pjwQ9CnpDooAlilt4UI1oODIltop3g1rZZNXX0aAn8bEALw\_wcB (Zugriff am: 6. Juli 2020).

- [13] Fahrräder – Sicherheitstechnische Anforderungen an Fahrräder – Teil 7: Prüfverfahren für Laufräder und Felgen (ISO 4210-7:2014); Deutsche Fassung EN ISO 4210-7:2014, DIN EN ISO 4210-7, 2014.
- [14] H. A. Richard und M. Sander, Technische Mechanik - Statik: Lehrbuch mit Praxisbeispielen, Klausuraufgaben und Lösungen, 3. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden, 2010.
- [15] J. Dankert und H. Dankert, Technische Mechanik: Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik, 7. Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2013. [Online]. Verfügbar unter: <http://gbv.ebib.com/patron/FullRecord.aspx?p=1206348>
- [16] W. Wunderlich und G. Kiener, Statik der Stabtragwerke, 1. Aufl. Stuttgart: Teubner, 2004.
- [17] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und W. A. Wall, Technische Mechanik 2: Elastostatik, 9. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. [Online]. Verfügbar unter: <http://site.ebrary.com/lib/alltitles/docDetail.action?docID=10187450>
- [18] A. Puck, Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten: Modelle für die Praxis. München: Hanser, 1996.
- [19] Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbund, VDI 2202, 2006.
- [20] Vergleichsdaten Epoxydharzsysteme – R&G Wiki. [Online]. Verfügbar unter: [https://www.r-g.de/wiki/Vergleichsdaten\\_Epoxydharzsysteme](https://www.r-g.de/wiki/Vergleichsdaten_Epoxydharzsysteme) (Zugriff am: 30. August 2020).
- [21] R&G Faserverbundwerkstoffe GmbH, Kohlegelege ST 100 g/m<sup>2</sup> (UD, 50 cm). [Online]. Verfügbar unter: <https://shop1.r-g.de/art/192100050-UUD> (Zugriff am: 30. August 2020).
- [22] R. Mahnken, Lehrbuch der technischen Mechanik - Elastostatik: Mit einer Einführung in Hybridstrukturen. Berlin: Springer Vieweg, 2015.
- [23] R&G Faserverbundwerkstoffe GmbH, Kohlegewebe 285 g/m<sup>2</sup> (Köper 4/4) 100 cm. [Online]. Verfügbar unter: <https://shop1.r-g.de/art/CS-285100-T4> (Zugriff am: 30. August 2020).
-

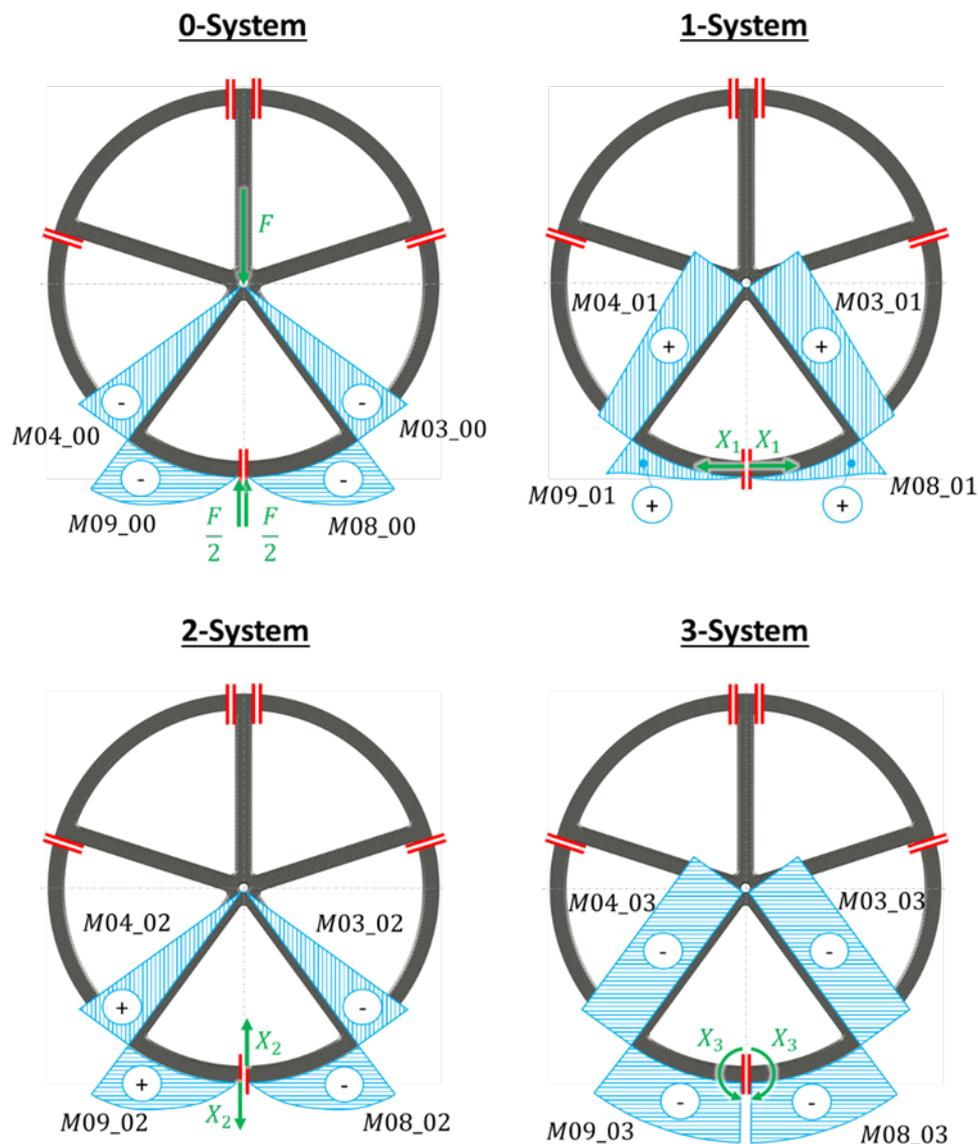
- [24] Maxima, ein Computer Algebra System. [Online]. Verfügbar unter: <http://maxima.sourceforge.net/de/> (Zugriff am: 14. September 2020).
- [25] W. Haager, Computeralgebra mit Maxima: Grundlagen der Anwendung und Programmierung, 2. Aufl., 2019.
- [26] Inventor | Software für mechanische 3D-Konstruktion und 3D-CAD | Autodesk. [Online]. Verfügbar unter: <https://www.autodesk.de/products/inventor/overview?plc=IN-VPROSA&term=1-YEAR&support=ADVANCED&quantity=1#internal-link-what-is-inventor> (Zugriff am: 17. September 2020).
-

## B. Anhang

### B.1 Berechnung der in das Laminat-KOS transformierten Steifigkeitsgrößen der $\pm 90^\circ$ Schicht

$\bar{Q}_{11} = \frac{E_K^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} \cos^4 \alpha + \frac{E_S^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} \sin^4 \alpha + \frac{\sin^2 2\alpha}{2} \left( \frac{\nu_{SK}^\# E_S^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} + 2 * G_{\perp\parallel}^\# \right)$ $\bar{Q}_{11} = \left( \frac{46.277}{1 - 0,321^2} \cos(45^\circ)^4 + \frac{46.277}{1 - 0,321^2} \sin(45^\circ)^4 + \frac{\sin(2 * 45^\circ)^2}{2} * \left( \frac{0,321 * 46.277}{1 - 0,321^2} + 2 * 2.645 \right) \right) * \frac{N}{\text{mm}^2}$ $\bar{Q}_{11} = 36.722 \frac{N}{\text{mm}^2}$	(9.83)
$\bar{Q}_{22} = \frac{E_K^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} \sin^4 \alpha + \frac{E_S^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} \cos^4 \alpha + \frac{\sin^2 2\alpha}{2} \left( \frac{\nu_{SK}^\# E_S^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} + 2 * G_{\perp\parallel}^\# \right)$ $\bar{Q}_{22} = \left( \frac{46.277}{1 - 0,321^2} \sin(45^\circ)^4 + \frac{46.277}{1 - 0,321^2} \cos(45^\circ)^4 + \frac{\sin(2 * 45^\circ)^2}{2} * \left( \frac{0,321 * 46.277}{1 - 0,321^2} + 2 * 2.645 \right) \right) * \frac{N}{\text{mm}^2}$ $\bar{Q}_{22} = 36.722 \frac{N}{\text{mm}^2}$	(9.84)
$\bar{Q}_{66} = G_{\perp\parallel}^\# + \frac{\sin^2 2\alpha}{4} \left( \frac{E_K^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} + \frac{E_S^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} - 2 * \frac{\nu_{SK}^\# E_S^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} - 4 * G_{\perp\parallel}^\# \right)$ $\bar{Q}_{66} = \left( 2.645 + \frac{\sin(2 * 45^\circ)^2}{4} \left( \frac{46.277}{1 - 0,321^2} + \frac{46.277}{1 - 0,321^2} - 2 * \frac{0,321 * 46.277}{1 - 0,321^2} - 4 * 2.645 \right) \right) * \frac{N}{\text{mm}^2}$ $\bar{Q}_{66} = 17.516 \frac{N}{\text{mm}^2}$	(9.85)
$\bar{Q}_{12} = \frac{\nu_{SK}^\# E_S^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} + \frac{\sin^2 2\alpha}{4} \left( \frac{E_K^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} + \frac{E_S^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} - 2 * \frac{\nu_{SK}^\# E_S^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} - 4 * G_{\perp\parallel}^\# \right)$ $\bar{Q}_{12} = \left( \frac{0,321 * 46.277}{1 - 0,321^2} + \frac{\sin(2 * 45^\circ)^2}{4} * \left( \frac{46.277}{1 - 0,321^2} + \frac{46.277}{1 - 0,321^2} - 2 * \frac{0,321 * 46.277}{1 - 0,321^2} - 4 * 2.645 \right) \right) * \frac{N}{\text{mm}^2}$ $\bar{Q}_{12} = 31.432 \frac{N}{\text{mm}^2}$	(9.86)
$\bar{Q}_{16} = -\frac{1}{2} * \sin 2\alpha * \left[ \left( \frac{E_K^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} + \frac{E_S^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} - 2 * \frac{\nu_{SK}^\# E_S^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} - 4 * G_{\perp\parallel}^\# \right) * \sin^2 \alpha - \left( \frac{E_{\parallel}}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} - \frac{\nu_{SK}^\# E_{\perp}}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} - 2 * G_{\perp\parallel}^\# \right) \right]$ $\bar{Q}_{16} = -\frac{\sin(2 * 45^\circ)}{2} * \left[ \left( \frac{46.277}{1 - 0,321^2} + \frac{46.277}{1 - 0,321^2} - 2 * \frac{0,321 * 46.277}{1 - 0,321^2} - 4 * 2.645 \right) * \sin(45^\circ)^2 - \left( \frac{46.277}{1 - 0,321^2} - \frac{0,321 * 46.277}{1 - 0,321^2} - 2 * 2.645 \right) \right] * \frac{N}{\text{mm}^2}$ $\bar{Q}_{16} = 0$	(9.87)
$\bar{Q}_{26} = -\frac{1}{2} * \sin 2\alpha * \left[ \left( \frac{E_S^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} - \frac{\nu_{SK}^\# E_S^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} - 2 * G_{\perp\parallel}^\# \right) - \left( \frac{E_K^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} + \frac{E_S^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} - 2 * \frac{\nu_{SK}^\# E_S^\#}{1 - \nu_{SK}^\# \nu_{KS}^\#} - 4 * G_{\perp\parallel}^\# \right) \sin^2 \alpha \right]$ $\bar{Q}_{26} = -\frac{\sin(2 * 45^\circ)}{2} * \left[ \left( \frac{46.277}{1 - 0,321^2} - \frac{0,321 * 46.277}{1 - 0,321^2} - 2 * 2.645 \right) - \left( \frac{46.277}{1 - 0,321^2} + \frac{46.277}{1 - 0,321^2} - 2 * \frac{0,321 * 46.277}{1 - 0,321^2} - 4 * 2.645 \right) \sin(45^\circ)^2 \right] * \frac{N}{\text{mm}^2}$ $\bar{Q}_{26} = 0$	(9.88)

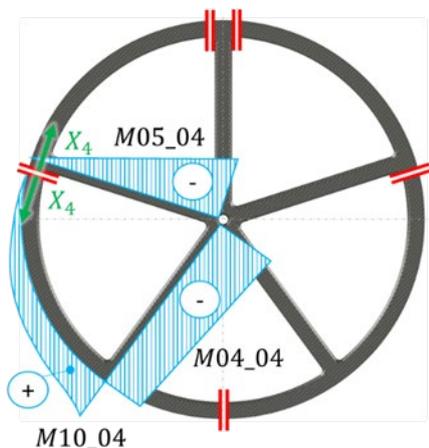
## B.2 Momentenverläufe mit virtuellen Kräften



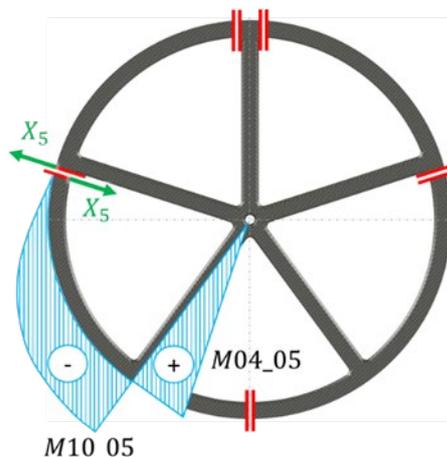
M03_00	$-\left(\frac{F}{2} * \sin(36^\circ) * x_3\right)$
M04_00	$-\left(\frac{F}{2} * \sin(36^\circ) * x_4\right)$
M08_00	$-\left(\frac{F}{2} * \sin(\varphi_8) * r\right)$
M09_00	$-\left(\frac{F}{2} * \sin(\varphi_9) * r\right)$
M03_02	$-(X_2 * \sin(36^\circ) * x_3)$
M04_02	$+(X_2 * \sin(36^\circ) * x_4)$
M08_02	$-(X_2 * \sin(\varphi_8) * r)$
M09_02	$+(X_2 * \sin(\varphi_9) * r)$

M03_01	$+(X_1 * (r - \cos(36^\circ) * x_3))$
M04_01	$+(X_1 * (r - \cos(36^\circ) * x_4))$
M08_01	$+(X_1 * (r - \cos(\varphi_8) * r))$
M09_01	$+(X_1 * (r - \cos(\varphi_9) * r))$
M03_03	$-X_3$
M04_03	$-X_3$
M03_03	$-X_3$
M03_03	$-X_3$

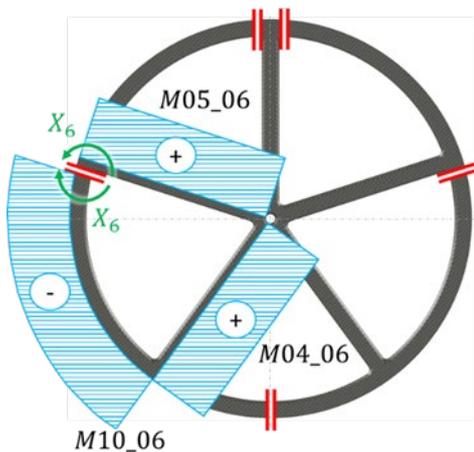
**4-System**



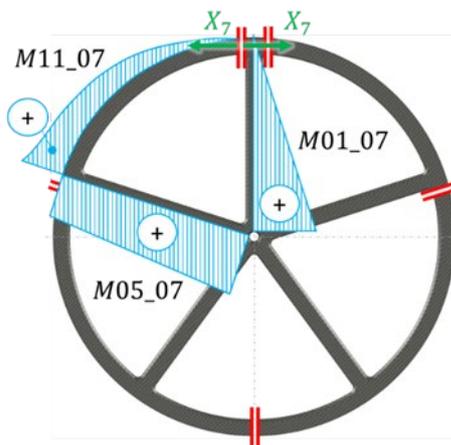
**5-System**



**6-System**

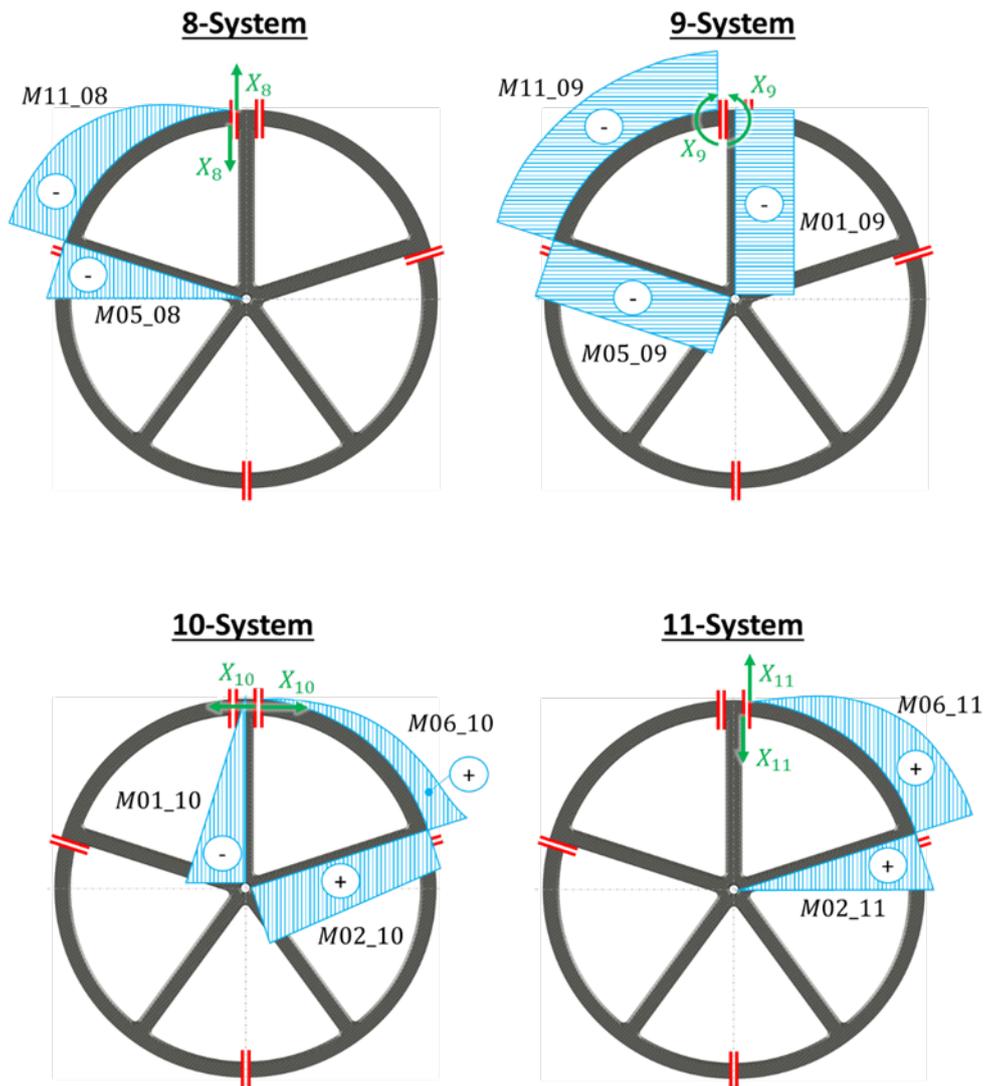


**7-System**



M04_04	$-(X_4 * (r - \cos(72^\circ) * x_4))$
M05_04	$-(X_4 * (r - x_5))$
M10_04	$+(X_4 * (r - \cos(\varphi_{10}) * r))$
M04_06	$+X_6$
M05_06	$+X_6$
M10_06	$-X_6$

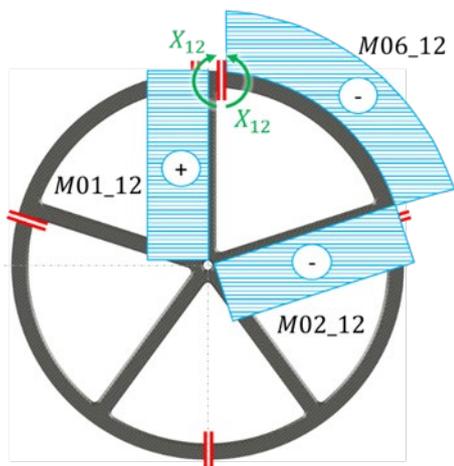
M04_05	$+(X_5 * \sin(72^\circ) * x_4)$
M05_05	0
M10_05	$-(X_5 * \sin(\varphi_{10}) * r)$
M01_07	$+(X_7(r - x_1))$
M05_07	$+(X_7 * (r - \cos(72^\circ) * x_5))$
M11_07	$+(X_7 * (r - \cos(\varphi_{11}) * r))$



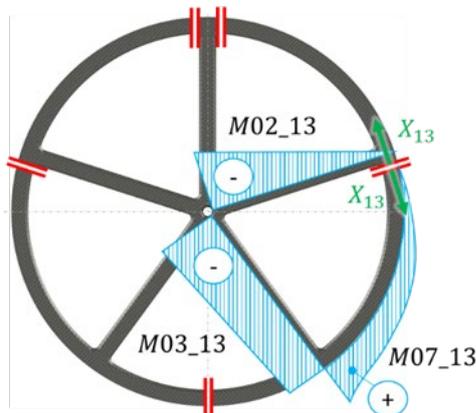
M01_08	0
M05_08	$-(X_8 * \sin(72^\circ) * x_5)$
M11_08	$-(X_8 * \sin(\varphi_{11}) * r)$
M01_10	$-(X_{10}(r - x_1))$
M02_10	$+(X_{10} * (r - \cos(72^\circ) * x_2))$
M06_10	$+(X_{10} * (r - (\cos(\varphi_6) * r))$

M01_09	$-X_9$
M05_09	$-X_9$
M11_09	$-X_9$
M01_11	0
M02_11	$+(X_{11} * \sin(72^\circ) * x_2)$
M06_11	$+(X_{11} * \sin(\varphi_6) * r)$

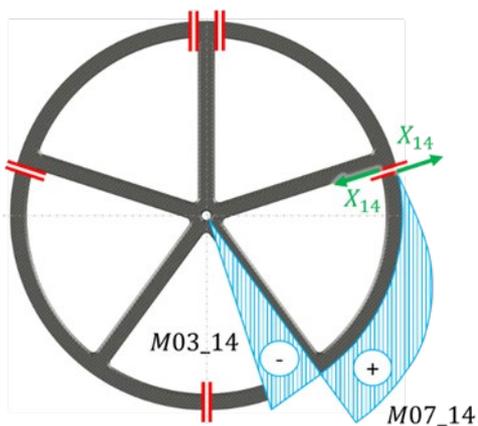
**12-System**



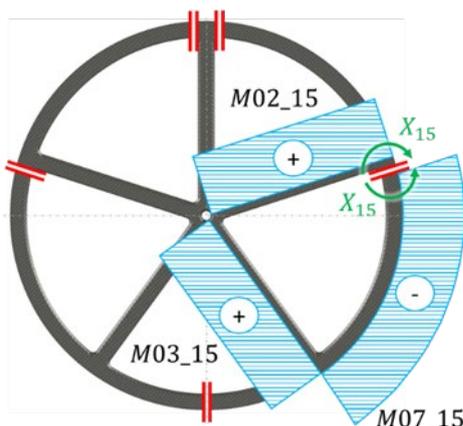
**13-System**



**14-System**



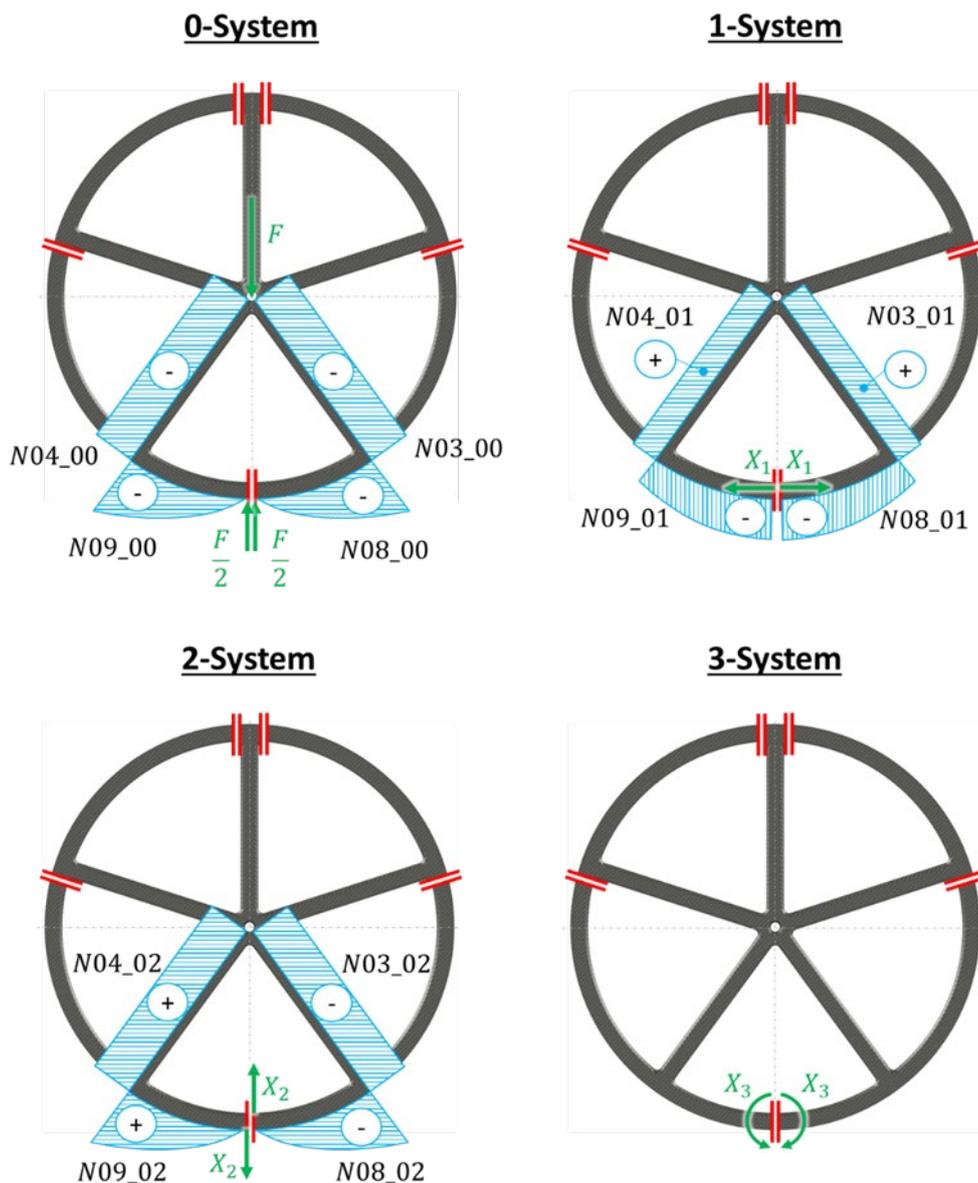
**15-System**



M01_12	$+X_{12}$
M02_12	$-X_{12}$
M06_12	$-X_{12}$
M02_14	0
M03_14	$-(X_{14} * \sin(72^\circ) * x_3)$
M07_14	$+(X_{14} * \sin(\varphi_7) * r)$

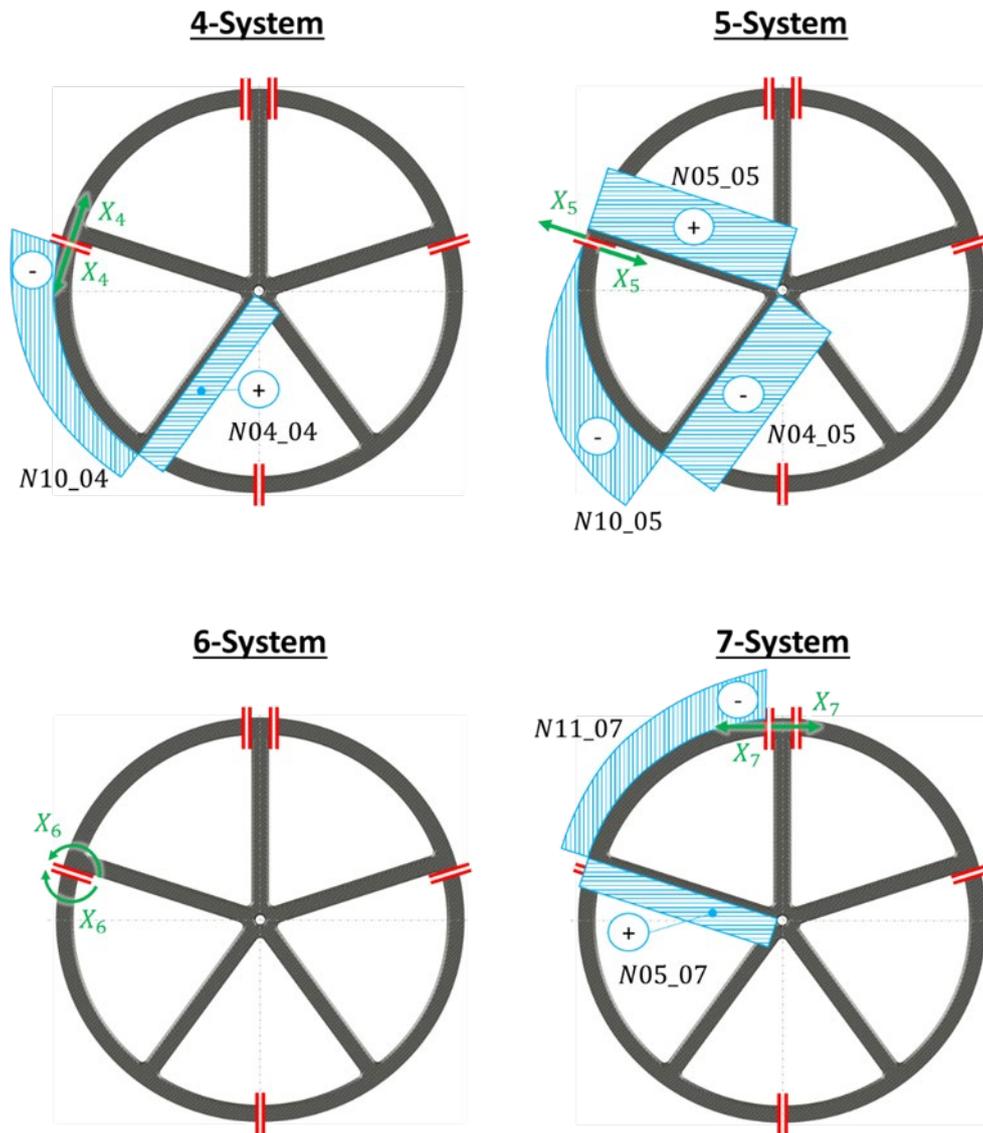
M02_13	$-(X_{13}(r - x_2))$
M03_13	$-(X_{13} * (r - \cos(72^\circ) * x_3))$
M07_13	$+(X_{13} * (r - (\cos(\varphi_7) * r)))$
M02_15	$+X_{15}$
M03_15	$+X_{15}$
M07_15	$-X_{15}$

### B.3 Normalkraftverläufe mit virtuellen Kräften



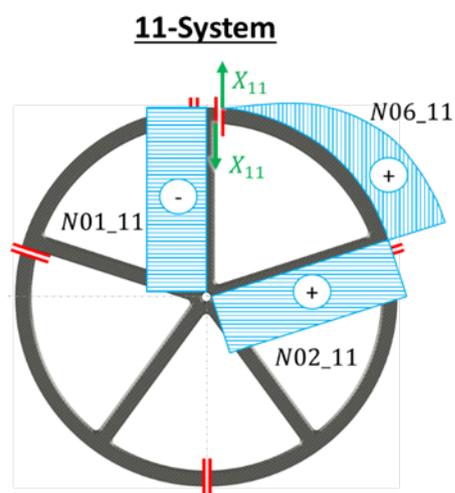
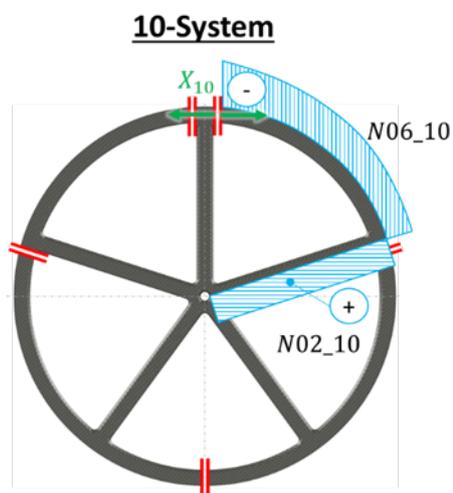
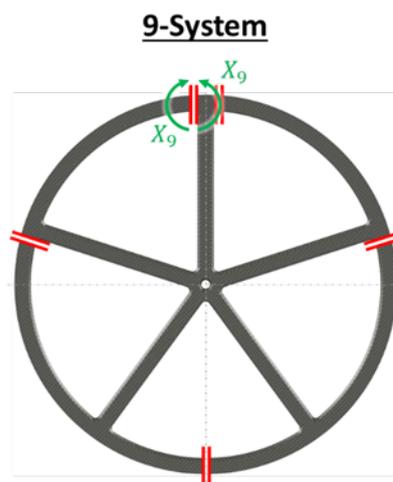
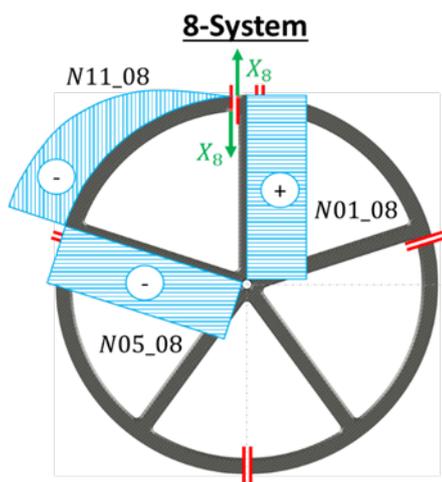
N03_00	$-\left(\frac{F}{2} * \cos(36^\circ)\right)$
N04_00	$-\left(\frac{F}{2} * \cos(36^\circ)\right)$
N08_00	$-\left(\frac{F}{2} * \sin(\varphi_8)\right)$
N09_00	$-\left(\frac{F}{2} * \sin(\varphi_8)\right)$
N03_02	$-(X_2 * \sin(36^\circ) * x_3)$
N04_02	$+(X_2 * \sin(36^\circ) * x_4)$
N08_02	$-(X_2 * \sin(\varphi_8) * r)$
N09_02	$+(X_2 * \sin(\varphi_9) * r)$

N03_01	$+(X_1 * \sin(36^\circ))$
N04_01	$+(X_1 * \sin(36^\circ))$
N08_01	$-(X_1 * \cos(\varphi_8))$
N09_01	$-(X_1 * \cos(\varphi_8))$
N03_03	0
N04_03	0
N03_03	0
N03_03	0



N04_04	$+(X_4 * \sin (72^\circ))$
N05_04	0
N10_04	$-(X_4 * \cos(\varphi_{10}))$
N04_06	0
N05_06	0
N10_06	0

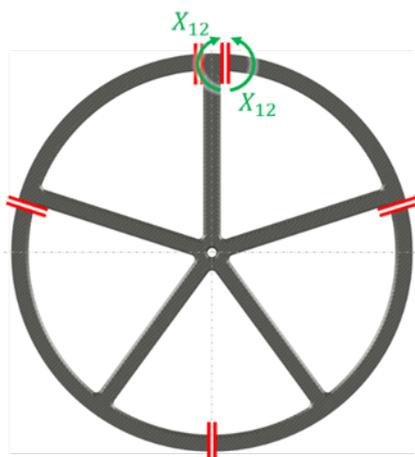
N04_05	$-(X_5 * \cos (72^\circ))$
N05_05	$+(X_5)$
N10_05	$-(X_5 * \sin (\varphi_{10}))$
N01_07	0
N05_07	$+(X_7 * \sin(72^\circ))$
N11_07	$-(X_7 * \cos (\varphi_{11}))$



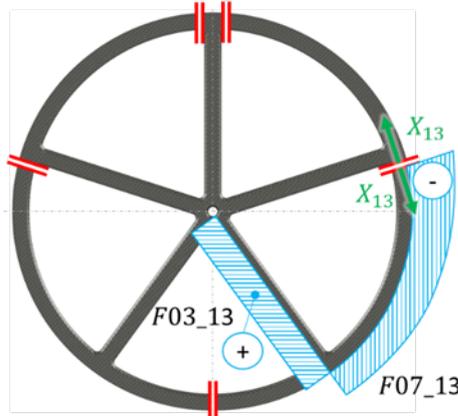
N01_08	$+(X_8)$
N05_08	$-(X_8 * \cos(72^\circ))$
N11_08	$-(X_8 * \sin(\varphi_{11}))$
N01_10	0
N02_10	$+(X_{10} * \sin(72^\circ))$
N06_10	$-(X_{10} * \cos(\varphi_6))$

N01_09	0
N05_09	0
N11_09	0
N01_11	$-(X_{11})$
N02_11	$+(X_{11} * \cos(72^\circ))$
N06_11	$+(X_{11} * \sin(\varphi_6))$

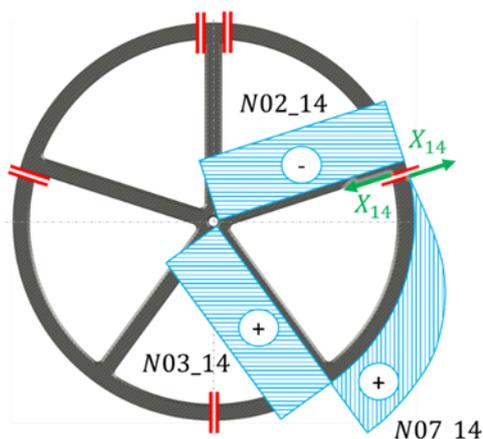
**12-System**



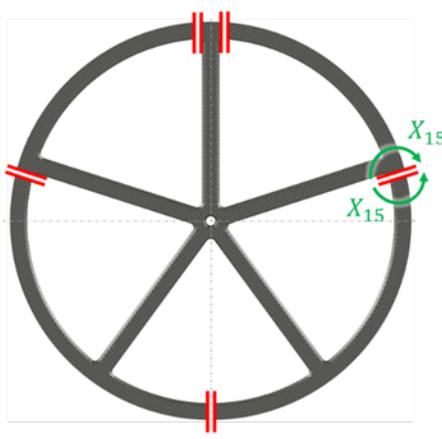
**13-System**



**14-System**



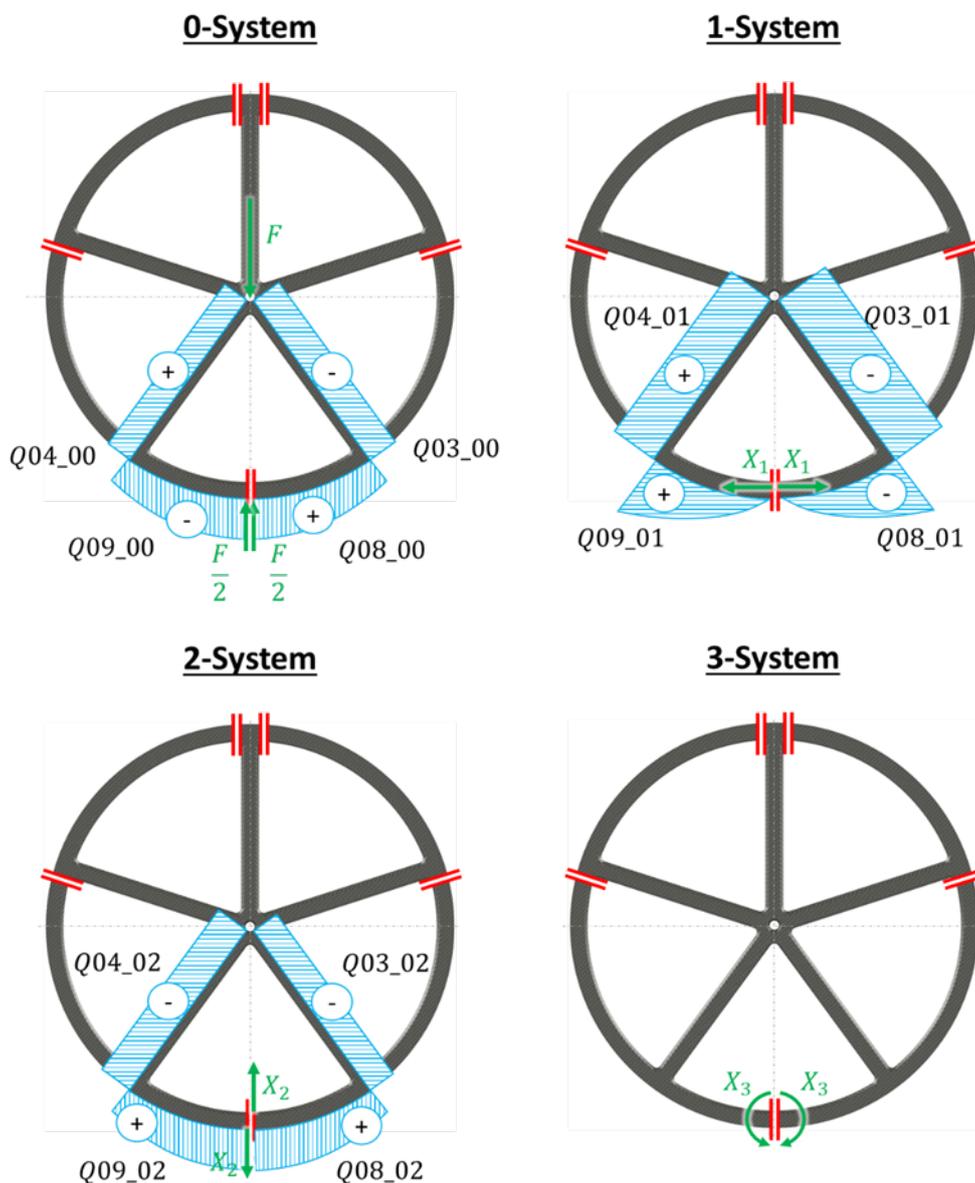
**15-System**



N01_12	0
N02_12	0
N06_12	0
N02_14	$-(X_{14})$
N03_14	$+(X_{14} * \cos(72^\circ))$
N07_14	$+(X_{14} * \sin(\varphi_7))$

N02_13	0
N03_13	$+(X_{13} * \sin(72^\circ))$
N07_13	$-(X_{13} * \cos(\varphi_7))$
N02_15	0
N03_15	0
N07_15	0

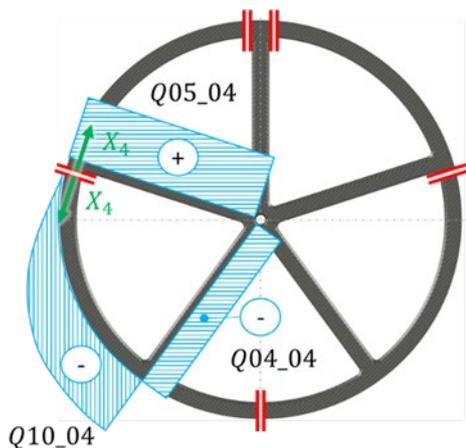
**B.4 Querkraftverläufe mit virtuellen Kräften**



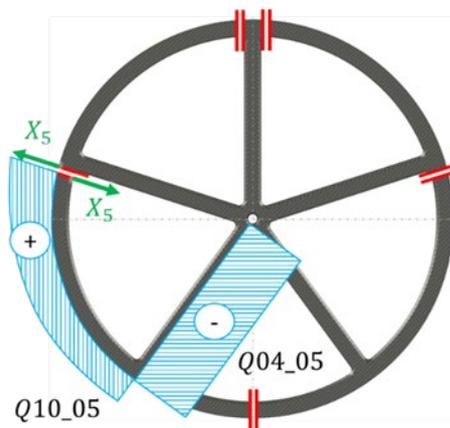
Q03_00	$-\left(\frac{F}{2} * \sin(36^\circ)\right)$
Q04_00	$+\left(\frac{F}{2} * \sin(36^\circ)\right)$
Q08_00	$+\left(\frac{F}{2} * \cos(\varphi_8)\right)$
Q09_00	$-\left(\frac{F}{2} * \cos(\varphi_9)\right)$
Q03_02	$-(X_2 * \sin(36^\circ))$
Q04_02	$-(X_2 * \sin(36^\circ))$
Q08_02	$+(X_2 * \cos(\varphi_8))$
Q09_02	$+(X_2 * \cos(\varphi_8))$

Q03_01	$-(X_1 * \cos(36^\circ))$
Q04_01	$+(X_1 * \cos(36^\circ))$
Q08_01	$-(X_1 * \sin(\varphi_8))$
Q09_01	$+(X_1 * \sin(\varphi_9))$
Q03_03	0
Q04_03	0
Q03_03	0
Q03_03	0

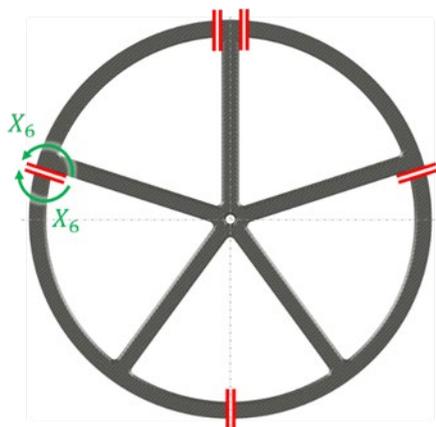
**4-System**



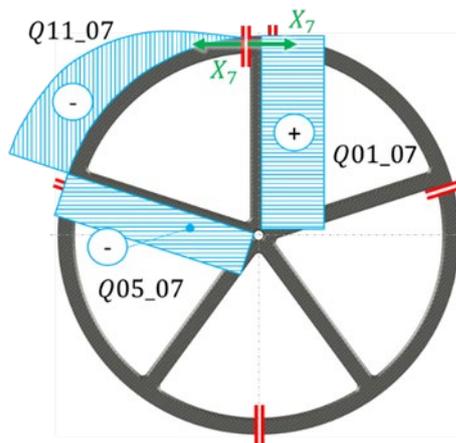
**5-System**



**6-System**

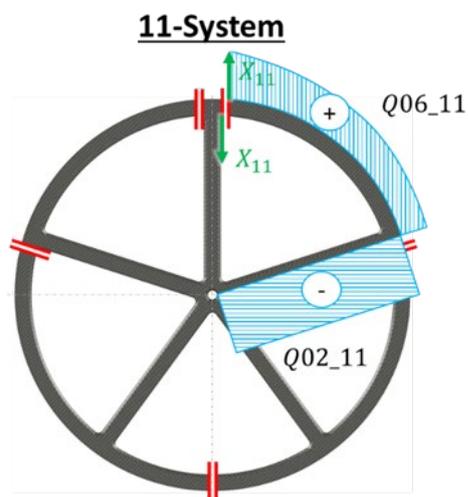
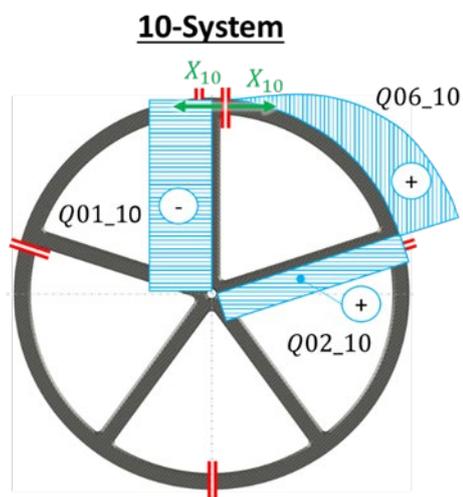
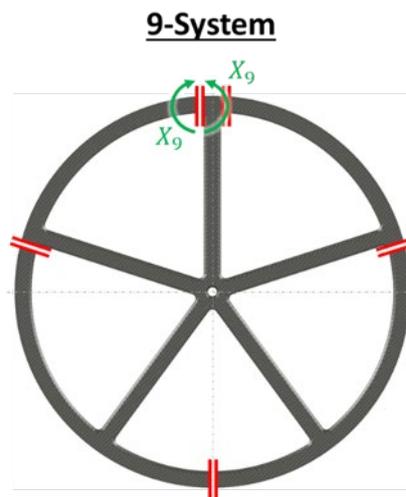
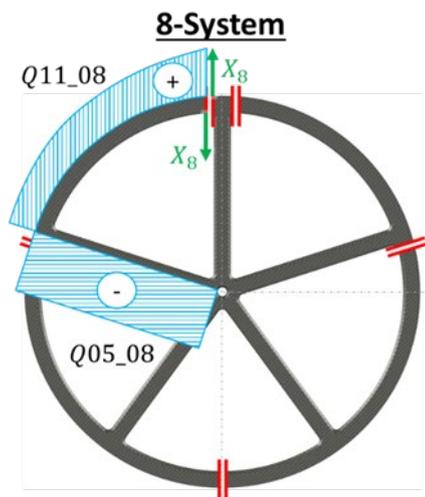


**7-System**



Q04_04	$+(X_4 * \cos (72^\circ))$
Q05_04	$-X_4$
Q10_04	$-(X_4 * \sin(\varphi_{10}))$
Q04_06	0
Q05_06	0
Q10_06	0

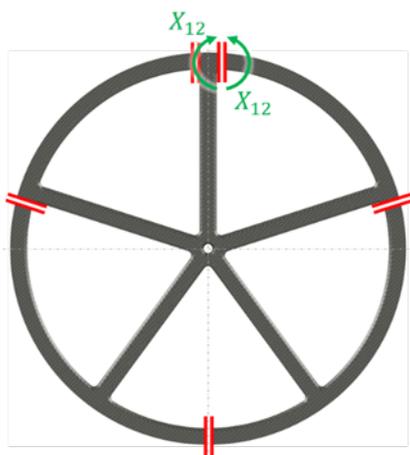
Q04_05	$-(X_5 * \sin (72^\circ))$
Q05_05	0
Q10_05	$= +(X_5 * \cos (\varphi_{10}))$
Q01_07	$+(X_7)$
Q05_07	$-(X_7 * \cos(72^\circ))$
Q11_07	$-(X_7 * \cos (\varphi_{11}))$



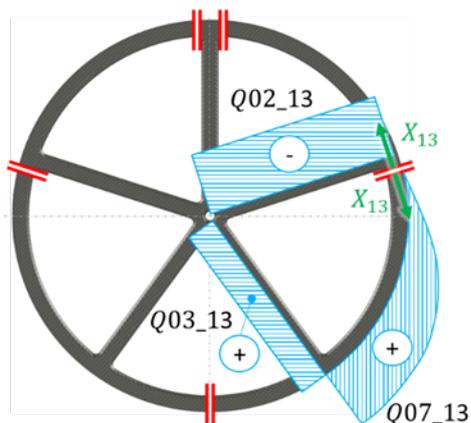
Q01_08	0
Q05_08	$-(X_8 * \sin(72^\circ))$
Q11_08	$+(X_8 * \cos(\varphi_{11}))$
Q01_10	$-(X_{10})$
Q02_10	$+(X_{10} * \cos(72^\circ))$
Q06_10	$+(X_{10} * \sin(\varphi_6))$

Q01_09	0
Q05_09	0
Q11_09	0
Q01_11	0
Q02_11	$-(X_{11} * \sin(72^\circ))$
Q06_11	$+(X_{11} * \cos(\varphi_6))$

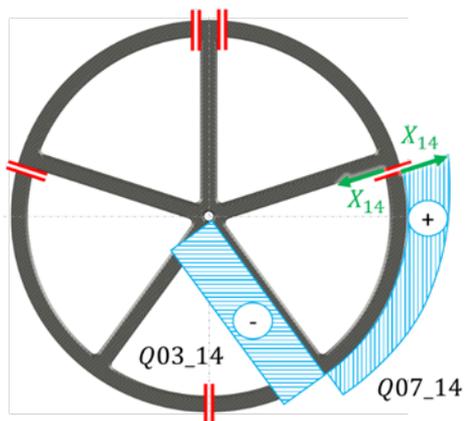
**12-System**



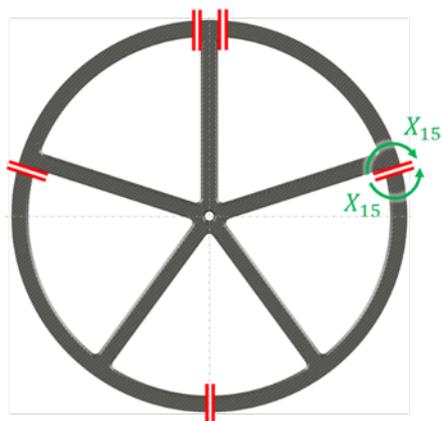
**13-System**



**14-System**



**15-System**



Q01_12	0
Q02_12	0
Q06_12	0
Q02_14	0
Q03_14	$-(X_{14} * \sin(72^\circ))$
Q07_14	$+(X_{14} * \cos(\varphi_7))$

Q02_13	$-(X_{13})$
Q03_13	$+(X_{13} * \cos(72^\circ))$
Q07_13	$+(X_{13} * \sin(\varphi_7))$
Q02_15	0
Q03_15	0
Q07_15	0

## B.5 Berechnete Verschiebungen

In dieser Matrix werden die einzelnen Verschiebungen dargestellt. Es ist darauf hinzuweisen, dass sich die Matrix über insgesamt 3 Zeilenumbrüche erstreckt.

0.0093944	$2.0948 \cdot 10^{-5}$	0,0	$-1,0448 \cdot 10^{-4}$	$-1,3016 \cdot 10^{-5}$	$5,1962 \cdot 10^{-6}$
0,0	0,0	$1,0636 \cdot 10^{-5}$	0,0	$-5,6953 \cdot 10^{-6}$	$4,7551 \cdot 10^{-6}$
-0,1045	$-1,0448 \cdot 10^{-4}$	0,0	$9,2988 \cdot 10^{-4}$	$6,8638 \cdot 10^{-5}$	$-3,8604 \cdot 10^{-5}$
-0,0070479	$-1,3016 \cdot 10^{-5}$	$-5,6953 \cdot 10^{-6}$	$6,8638 \cdot 10^{-5}$	$3,0364 \cdot 10^{-5}$	$-1,6338 \cdot 10^{-5}$
0,0058844	$5,1962 \cdot 10^{-6}$	$4,7551 \cdot 10^{-6}$	$-3,8604 \cdot 10^{-5}$	$-1,6338 \cdot 10^{-5}$	$2,201 \cdot 10^{-5}$
0,029525	$4,8343 \cdot 10^{-5}$	$2,3859 \cdot 10^{-5}$	$-2,6656 \cdot 10^{-4}$	$-1,3861 \cdot 10^{-4}$	$1,0505 \cdot 10^{-4}$
0,0	0,0	0,0	0,0	$-1,1175 \cdot 10^{-5}$	$2,899 \cdot 10^{-8}$
0,0	0,0	0,0	0,0	$3,6542 \cdot 10^{-6}$	$-9,4193 \cdot 10^{-9}$
0,0	0,0	0,0	0,0	$4,0591 \cdot 10^{-5}$	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
-0,0070479	$-1,3016 \cdot 10^{-5}$	$5,6953 \cdot 10^{-6}$	$6,8638 \cdot 10^{-5}$	0,0	0,0
-0,0058844	$-5,1962 \cdot 10^{-6}$	$4,7551 \cdot 10^{-6}$	$3,8604 \cdot 10^{-5}$	0,0	0,0
0,029525	$4,8343 \cdot 10^{-5}$	$-2,3859 \cdot 10^{-5}$	$-2,6656 \cdot 10^{-4}$	0,0	0,0

$4,8343 \cdot 10^{-5}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$2,3859 \cdot 10^{-5}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$-2,6656 \cdot 10^{-4}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$-1,3861 \cdot 10^{-4}$	$-1,1175 \cdot 10^{-5}$	$3,6542 \cdot 10^{-6}$	$4,0591 \cdot 10^{-5}$	0,0	0,0
$1,0505 \cdot 10^{-4}$	$2,899 \cdot 10^{-8}$	$-9,4193 \cdot 10^{-9}$	0,0	0,0	0,0
$9,2988 \cdot 10^{-4}$	$6,8638 \cdot 10^{-5}$	$-3,8604 \cdot 10^{-5}$	$-2,6656 \cdot 10^{-4}$	0,0	0,0
$6,8638 \cdot 10^{-5}$	$3,0364 \cdot 10^{-5}$	$-1,6338 \cdot 10^{-5}$	$-1,3861 \cdot 10^{-4}$	$-8,5198 \cdot 10^{-6}$	0,0
$-3,8604 \cdot 10^{-5}$	$-1,6338 \cdot 10^{-5}$	$2,201 \cdot 10^{-5}$	$1,0505 \cdot 10^{-4}$	0,0	$-3,0482 \cdot 10^{-8}$
$-2,6656 \cdot 10^{-4}$	$-1,3861 \cdot 10^{-4}$	$1,0505 \cdot 10^{-4}$	$9,2988 \cdot 10^{-4}$	$4,0591 \cdot 10^{-5}$	0,0
0,0	$-8,5198 \cdot 10^{-6}$	0,0	$4,0591 \cdot 10^{-5}$	$3,0364 \cdot 10^{-5}$	$1,6338 \cdot 10^{-5}$
0,0	0,0	$-3,0482 \cdot 10^{-8}$	0,0	$1,6338 \cdot 10^{-5}$	$2,201 \cdot 10^{-5}$
0,0	$4,0591 \cdot 10^{-5}$	0,0	$-2,6656 \cdot 10^{-4}$	$-1,3861 \cdot 10^{-4}$	$-1,0505 \cdot 10^{-4}$
0,0	0,0	0,0	0,0	$-1,1175 \cdot 10^{-5}$	$-3,6542 \cdot 10^{-6}$
0,0	0,0	0,0	0,0	$-2,899 \cdot 10^{-8}$	$-9,4193 \cdot 10^{-9}$
0,0	0,0	0,0	0,0	$6,8638 \cdot 10^{-5}$	$3,8604 \cdot 10^{-5}$

0,0	$-1,3016 \cdot 10^{-5}$	$-5,1962 \cdot 10^{-6}$	$4,8343 \cdot 10^{-5}$
0,0	$5,6953 \cdot 10^{-6}$	$4,7551 \cdot 10^{-6}$	$-2,3859 \cdot 10^{-5}$
0,0	$6,8638 \cdot 10^{-5}$	$3,8604 \cdot 10^{-5}$	$-2,6656 \cdot 10^{-4}$
0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0
$4,0591 \cdot 10^{-5}$	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0
$-2,6656 \cdot 10^{-4}$	0,0	0,0	0,0
$-1,3861 \cdot 10^{-4}$	$-1,1175 \cdot 10^{-5}$	$-2,899 \cdot 10^{-8}$	$6,8638 \cdot 10^{-5}$
$-1,0505 \cdot 10^{-4}$	$-3,6542 \cdot 10^{-6}$	$-9,4193 \cdot 10^{-9}$	$3,8604 \cdot 10^{-5}$
$9,2988 \cdot 10^{-4}$	$4,0591 \cdot 10^{-5}$	0,0	$-2,6656 \cdot 10^{-4}$
$4,0591 \cdot 10^{-5}$	$3,0364 \cdot 10^{-5}$	$1,6338 \cdot 10^{-5}$	$-1,3861 \cdot 10^{-4}$
0,0	$1,6338 \cdot 10^{-5}$	$2,201 \cdot 10^{-5}$	$-1,0505 \cdot 10^{-4}$
$-2,6656 \cdot 10^{-4}$	$-1,3861 \cdot 10^{-4}$	$-1,0505 \cdot 10^{-4}$	$9,2988 \cdot 10^{-4}$

## B.6 Funktionen des tatsächlichen Momenten-, Normalkraft und Querkraftverlauf

### Funktionen für tatsächliche Momentenverläufe im Laufrad

$$\begin{aligned}
 M01 &= 0 \\
 M02 &= -25,581 \text{ N} * x_2 - 0,158 \text{ Nm} \\
 M03 &= -384,702 \text{ N} * x_3 + 47,250 \text{ Nm} \\
 M04 &= -384,702 \text{ N} * x_4 + 47,250 \text{ Nm} \\
 M05 &= -25,581 \text{ N} * x_5 - 0,158 \text{ Nm} \\
 M06 &= -94,654 \text{ Nm} * \sin(\varphi_6) - 144,244 \text{ Nm} * \cos(\varphi_6) + 163,938 \text{ Nm} \\
 M07 &= -142,7 \text{ Nm} * \sin(\varphi_7) - 126,802 \text{ Nm} * \cos(\varphi_7) + 164,096 \text{ Nm} \\
 M08 &= -376,89 \text{ Nm} * \sin(\varphi_8) - 87,186 \text{ Nm} * \cos(\varphi_8) + 211,346 \text{ Nm} \\
 M09 &= -376,89 \text{ Nm} * \sin(\varphi_9) - 87,186 \text{ Nm} * \cos(\varphi_9) + 211,346 \text{ Nm} \\
 M10 &= -142,7 \text{ Nm} * \sin(\varphi_{10}) - 126,802 \text{ Nm} * \cos(\varphi_{10}) + 164,096 \text{ Nm} \\
 M11 &= -94,654 \text{ Nm} * \sin(\varphi_{11}) - 144,244 \text{ Nm} * \cos(\varphi_{11}) + 163,938 \text{ Nm}
 \end{aligned}$$

### Funktionen für tatsächliche Normalkraftverläufe im Laufrad

$$\begin{aligned}
 N01 &= 621.59 \text{ N} \\
 N02 &= 822.96 \text{ N} \\
 N03 &= -581.7 \text{ N} \\
 N04 &= -581.7 \text{ N} \\
 N05 &= 822.96 \text{ N} \\
 N06 &= -310.8 \text{ N} * \sin(\varphi_6) - 473.63 \text{ N} * \cos(\varphi_6) \\
 N07 &= -468.56 \text{ N} * \sin(\varphi_7) - 416.36 \text{ N} * \cos(\varphi_7) \\
 N08 &= -1237.5 \text{ N} * \sin(\varphi_8) - 286.28 \text{ N} * \cos(\varphi_8) \\
 N09 &= -1237.5 \text{ N} * \sin(\varphi_9) - 286.28 \text{ N} * \cos(\varphi_9) \\
 N10 &= -468.56 \text{ N} * \sin(\varphi_{10}) - 416.36 \text{ N} * \cos(\varphi_{10}) \\
 N11 &= -310.8 \text{ N} * \sin(\varphi_{11}) - 473.63 \text{ N} * \cos(\varphi_{11})
 \end{aligned}$$

### Funktionen für tatsächliche Querkraftverläufe im Laufrad

$$\begin{aligned}
 Q01 &= 0.0 \text{ N} \\
 Q02 &= 25.582 \text{ N} \\
 Q03 &= -384.7 \text{ N} \\
 Q04 &= 384.7 \text{ N} \\
 Q05 &= -25.582 \text{ N} \\
 Q06 &= 473.63 \text{ N} * \sin(\varphi_6) - 310.8 \text{ N} * \cos(\varphi_6) \\
 Q07 &= 416.36 \text{ N} * \sin(\varphi_7) - 468.56 \text{ N} * \cos(\varphi_7) \\
 Q08 &= 1237.5 \text{ N} * \cos(\varphi_8) - 286.28 \text{ N} * \sin(\varphi_8) \\
 Q09 &= 286.28 \text{ N} * \sin(\varphi_9) - 1237.5 \text{ N} * \cos(\varphi_9) \\
 Q10 &= 468.56 \text{ N} * \cos(\varphi_{10}) - 416.36 \text{ N} * \sin(\varphi_{10}) \\
 Q11 &= 310.8 \text{ N} * \cos(\varphi_{11}) - 473.63 \text{ N} * \sin(\varphi_{11})
 \end{aligned}$$

### B.7 Funktionen im „0-System“ zum Momenten-, Normalkraft und Querkraftverlauf für die Variante „mit Bremskraft“

M03_00	$-\left(\frac{F}{2} * \sin(36^\circ) * x_3\right) + \left(\frac{B}{2} * (r - \cos(36^\circ) * x_3)\right)$
M04_00	$-\left(\frac{F}{2} * \sin(36^\circ) * x_3\right) - \left(\frac{B}{2} * (r - \cos(36^\circ) * x_3)\right)$
M08_00	$-\left(\sin(\varphi_8) * \frac{F}{2} * r\right) + \left(1 - \cos(\varphi_8) * \frac{B}{2} * r\right)$
M09_00	$-\left(\sin(\varphi_9) * \frac{F}{2} * r\right) - \left(1 - \cos(\varphi_9) * \frac{B}{2} * r\right)$

N03_00	$+\left(\frac{B}{2} * \sin(36^\circ)\right) - \left(\frac{F}{2} * \cos(36^\circ)\right)$
N04_00	$-\left(\frac{B}{2} * \sin(36^\circ)\right) - \left(\frac{F}{2} * \cos(36^\circ)\right)$
N08_00	$-\left(\cos(\varphi_8) * \frac{B}{2}\right) - \left(\sin(\varphi_8) * \frac{F}{2}\right)$
N09_00	$+\left(\cos(\varphi_9) * \frac{B}{2}\right) - \left(\sin(\varphi_9) * \frac{F}{2}\right)$

Q03_00	$-\left(\frac{B}{2} * \cos(36^\circ)\right) - \left(\frac{F}{2} * \sin(36^\circ)\right)$
Q04_00	$+\left(\frac{B}{2} * \cos(36^\circ)\right) - \left(\frac{F}{2} * \sin(36^\circ)\right)$
Q08_00	$-\left(\sin(\varphi_8) * \frac{B}{2}\right) + \left(\cos(\varphi_8) * \frac{F}{2}\right)$
Q09_00	$-\left(\sin(\varphi_9) * \frac{B}{2}\right) - \left(\cos(\varphi_9) * \frac{F}{2}\right)$

### B.8 Geometrische Schichteigenschaften der unterschiedlichen Felgenprofilvarianten

	Felgengeometrie-variante	-14	-10	-5	0	5	10	15	20
Gewebe	Flächenträgheitsmoment [ $mm^4$ ]	1.101	1.809	3.114	4.942	7.362	10.434	14.223	18.794
	Schwerpunkt [ $mm$ ]	309	308	306	305	303	301	299	297
	Fläche [ $mm^2$ ]	51	53	57	60	64	68	72	76
Gesamt-UD	Flächenträgheitsmoment [ $mm^4$ ]	1.643	2.796	5.051	8.279	12.539	17.898	24.412	32.136
	Schwerpunkt [ $mm$ ]	309	308	306	305	303	301	300	298
	Fläche [ $mm^2$ ]	95	101	109	116	123	130	136	143

### B.9 Geometrische Schichteigenschaften der unterschiedlichen Felgenprofilvarianten

	Speichen-geometrie-variante	12	17	22	27	32	32 +5	32 +10	32 +15	32 +20
Gewebe	Flächenträgheitsmoment [ $mm^4$ ]	278	818	1.806	3.378	5.669	7.910	10.612	13.809	17.536
	Schwerpunkt [ $mm$ ]	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Fläche [ $mm^2$ ]	17	24	31	38	46	49	53	56	60
Gesamt-UD	Flächen-trägheitsmoment [ $mm^4$ ]	379	1.252	2.938	5.706	9.823	13.898	18.850	24.744	31.648
	Schwerpunkt [ $mm$ ]	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Fläche [ $mm^2$ ]	29	43	58	72	86	93	101	108	115

### B.10 Geometrische Schichteigenschaften der Gesamt-UD Schicht mit unterschiedlicher Einzel-UD-Schichtanzahl

	<b>Einzelschicht-Anzahl</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>
<b>Felge UD</b>	<b>Flächenträgheitsmoment [mm<sup>4</sup>]</b>	8.279	7.182	6.084	4.948	3.772	2.556	1.299
	<b>Schwerpunkt [mm]</b>	305	305	305	305	305	305	305
	<b>Fläche [mm<sup>2</sup>]</b>	116	99	83	67	50	33	17
<b>Speiche UD</b>	<b>Flächenträgheitsmoment [mm<sup>4</sup>]</b>	9.823	8.526	7.196	5.830	4.428	2.989	1.514
	<b>Schwerpunkt [mm]</b>	0	0	0	0	0	0	0
	<b>Fläche [mm<sup>2</sup>]</b>	86	74	62	50	38	25	13

**B.11 Maximale Dehnungen im Laufrad bei den unterschiedlichen Geometrievarianten-Kombinationen**

		Felgenreometrie								
		F-14	F-10	F-5	F0	F+5	F+10	F+15	F+20	
Speichengeometrie	S12	0,773 %	0,517 %	0,331 %	0,258 %	0,209 %	0,173 %	0,146 %	0,125 %	
	S17	0,734 %	0,502 %	0,326 %	0,245 %	0,201 %	0,167 %	0,142 %	0,122 %	
	S22	0,682 %	0,476 %	0,316 %	0,230 %	0,190 %	0,160 %	0,137 %	0,119 %	
	S27	0,631 %	0,447 %	0,303 %	0,218 %	0,179 %	0,152 %	0,131 %	0,114 %	
	S32	0,589 %	0,420 %	0,288 %	0,210 %	0,169 %	0,144 %	0,125 %	0,109 %	
	S32+5	0,564 %	0,403 %	0,278 %	0,204 %	0,163 %	0,139 %	0,120 %	0,106 %	
	S32+10	0,541 %	0,388 %	0,268 %	0,198 %	0,158 %	0,135 %	0,117 %	0,102 %	
	S32+15	0,521 %	0,375 %	0,260 %	0,193 %	0,153 %	0,131 %	0,113 %	0,099 %	
	S32+20	0,502 %	0,363 %	0,252 %	0,188 %	0,150 %	0,127 %	0,110 %	0,097 %	

**B.12 Maximale Stauchungen im Laufrad bei den unterschiedlichen Geometrievarianten-Kombinationen**

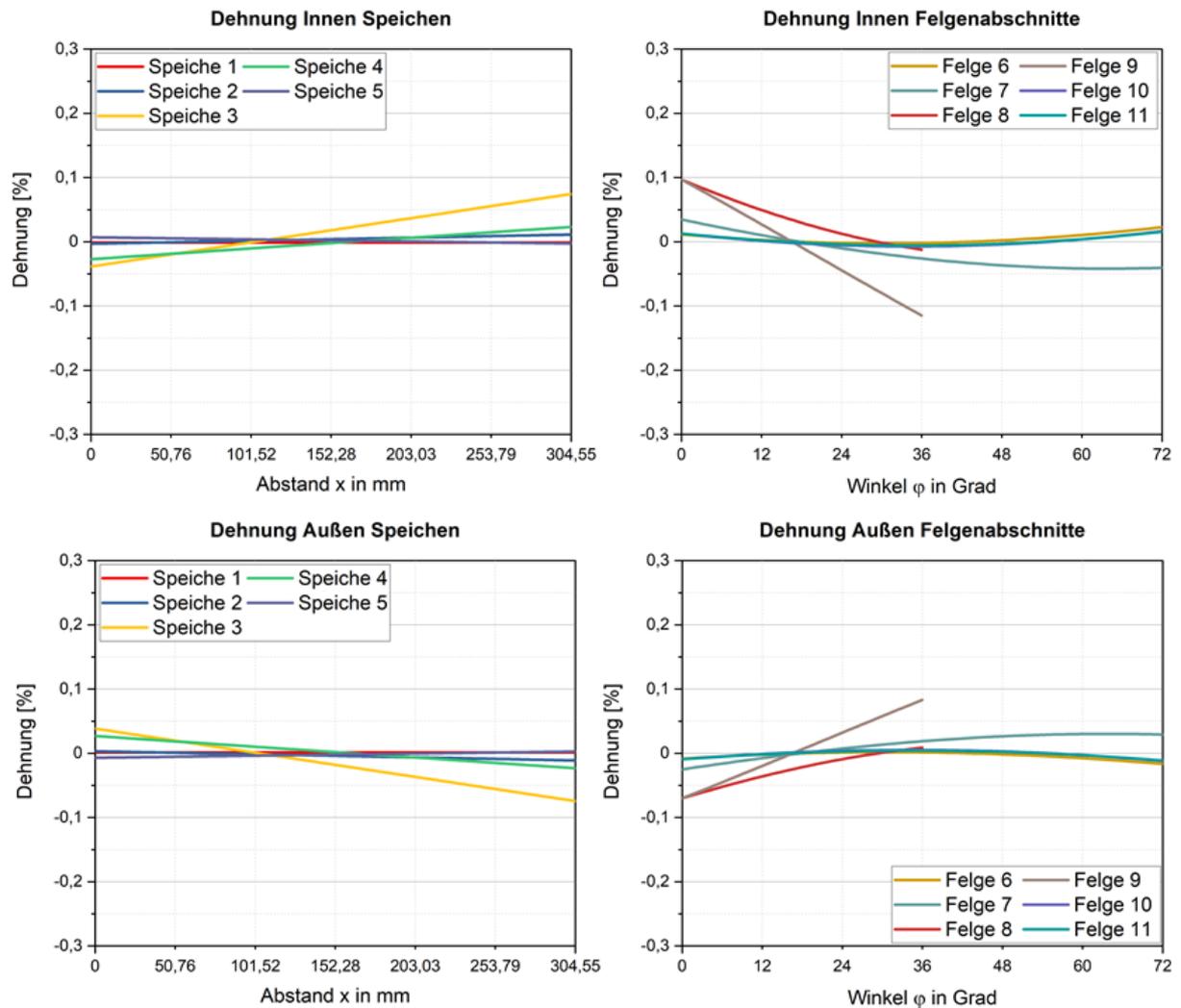
		Felgenreometrie								
		F-14	F-10	F-5	F0	F+5	F+10	F+15	F+20	
Speichengeometrie	S12	-0,743 %	-0,508 %	-0,331 %	-0,254 %	-0,203 %	-0,165 %	-0,137 %	-0,116 %	
	S17	-0,662 %	-0,462 %	-0,321 %	-0,253 %	-0,203 %	-0,166 %	-0,139 %	-0,117 %	
	S22	-0,602 %	-0,421 %	-0,312 %	-0,249 %	-0,202 %	-0,166 %	-0,139 %	-0,118 %	
	S27	-0,564 %	-0,392 %	-0,299 %	-0,242 %	-0,198 %	-0,165 %	-0,139 %	-0,119 %	
	S32	-0,540 %	-0,372 %	-0,284 %	-0,233 %	-0,194 %	-0,162 %	-0,138 %	-0,118 %	
	S32+5	-0,528 %	-0,362 %	-0,274 %	-0,227 %	-0,190 %	-0,160 %	-0,137 %	-0,118 %	
	S32+10	-0,518 %	-0,354 %	-0,265 %	-0,220 %	-0,185 %	-0,158 %	-0,135 %	-0,117 %	
	S32+15	-0,509 %	-0,348 %	-0,256 %	-0,214 %	-0,181 %	-0,155 %	-0,133 %	-0,116 %	
	S32+20	-0,501 %	-0,343 %	-0,249 %	-0,209 %	-0,177 %	-0,152 %	-0,131 %	-0,115 %	

**B.13 Masse des Laufrads bei den unterschiedlichen Kombinationen der Geometrievarianten**

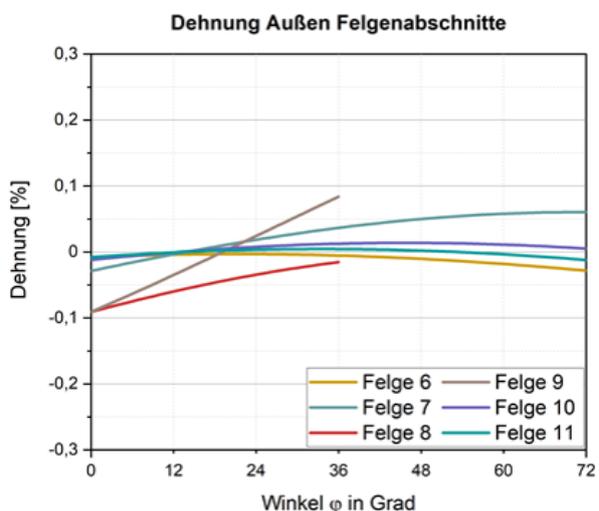
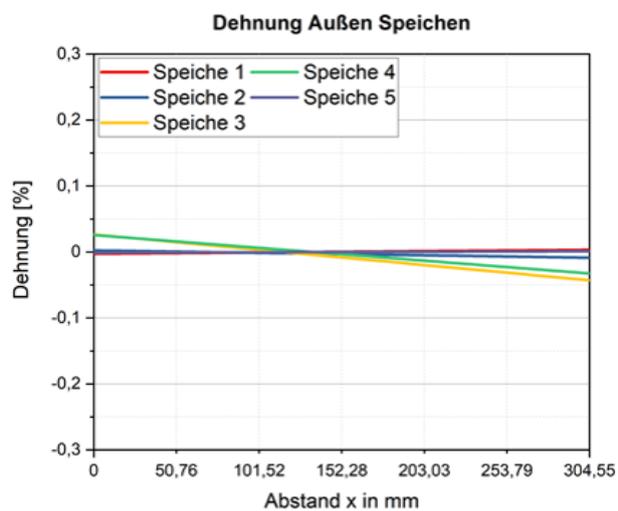
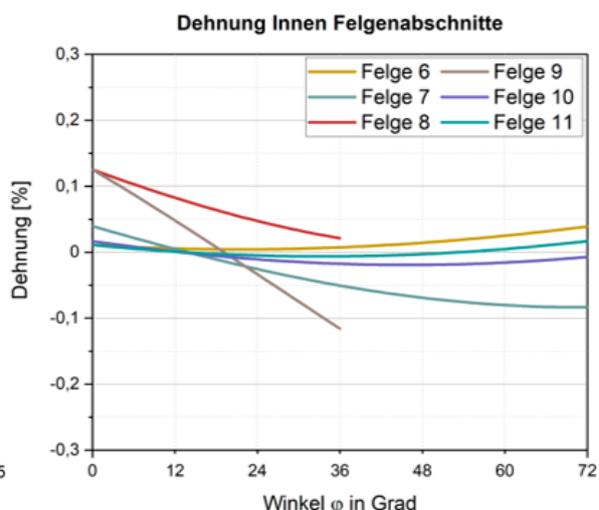
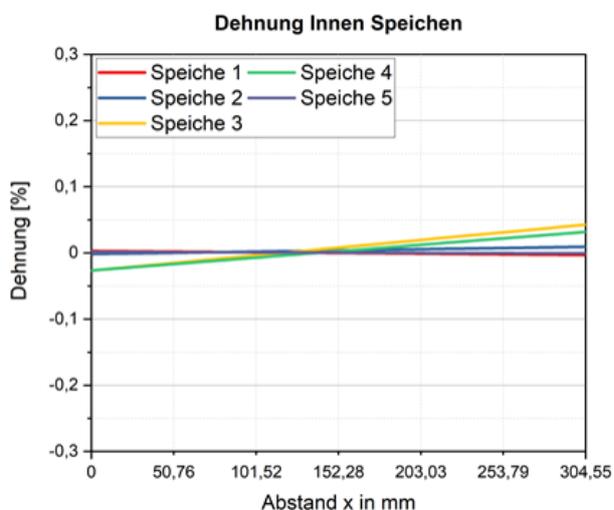
		Felgenreometrie								
		F-14	F-10	F-5	F0	F+5	F+10	F+15	F+20	
Speichengeometrie	S12	489 g	512 g	541 g	570 g	599 g	628 g	657 g	686 g	
	S17	535 g	558 g	587 g	616 g	645 g	674 g	703 g	732 g	
	S22	581 g	604 g	633 g	662 g	691 g	720 g	749 g	778 g	
	S27	627 g	650 g	679 g	708 g	737 g	766 g	795 g	824 g	
	S32	673 g	696 g	725 g	754 g	783 g	812 g	841 g	870 g	
	S32+5	696 g	719 g	748 g	777 g	806 g	835 g	864 g	893 g	
	S32+10	719 g	742 g	771 g	800 g	829 g	858 g	887 g	916 g	
	S32+15	742 g	765 g	794 g	823 g	852 g	881 g	910 g	939 g	
	S32+20	764 g	788 g	817 g	846 g	875 g	904 g	933 g	962 g	

## B.14 Dehnungsverläufe ausgewählter Kombinationen von Felgen und Speichengeometrien mit Bremskraft

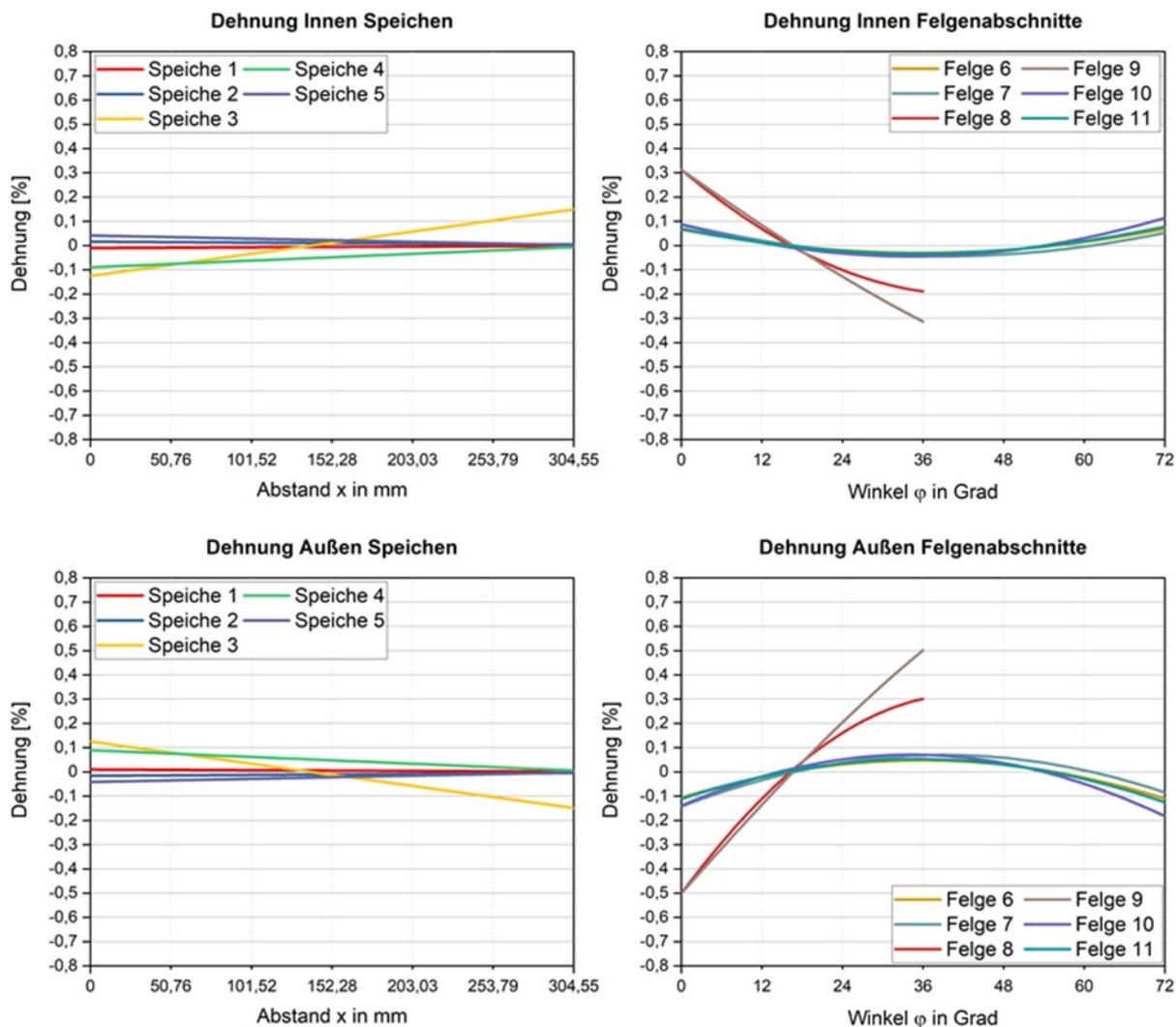
### Kombination „F+20 / S32+20



### Kombination „F+20 / S12“

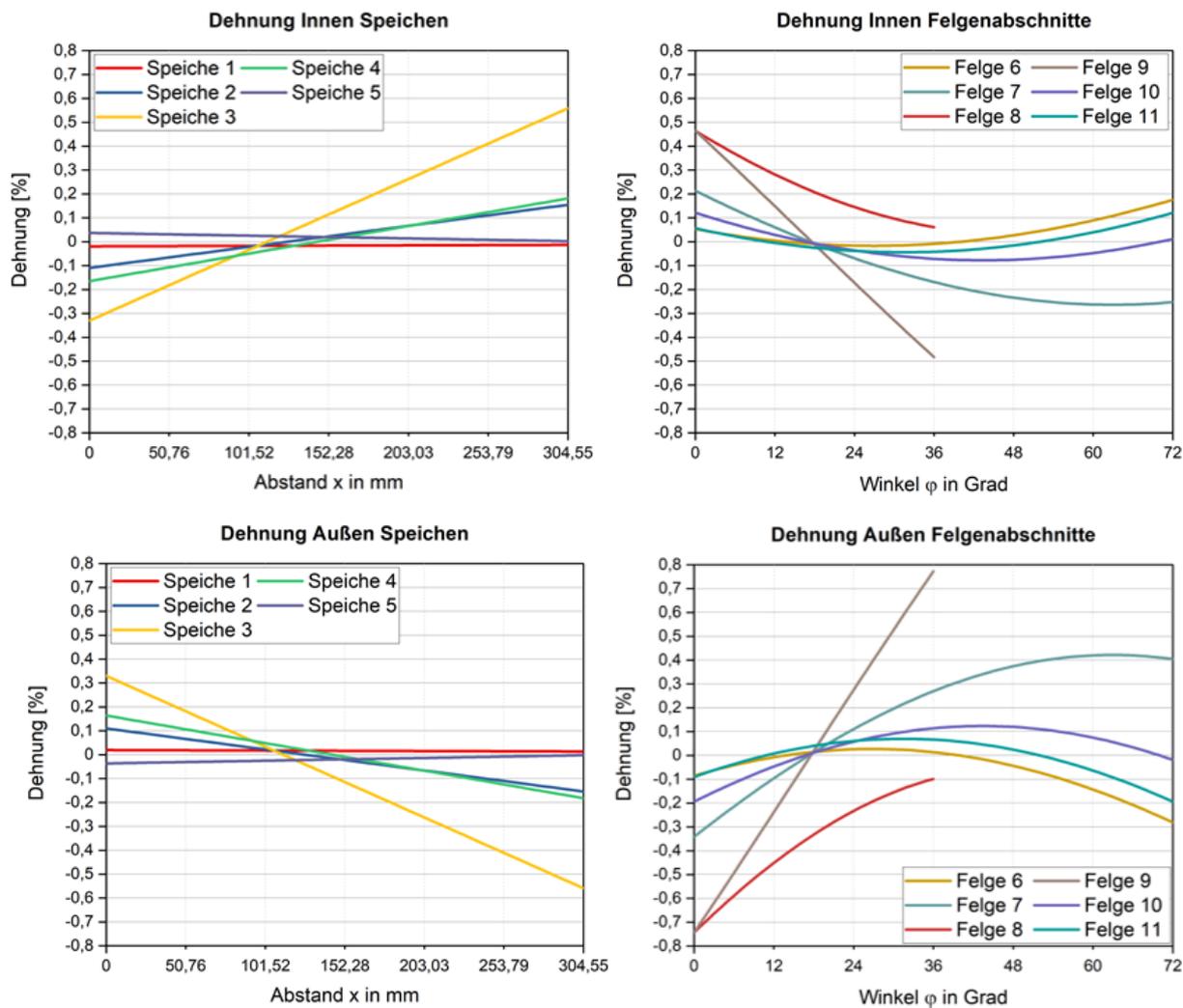


### Kombination „F-14 / S32+20“



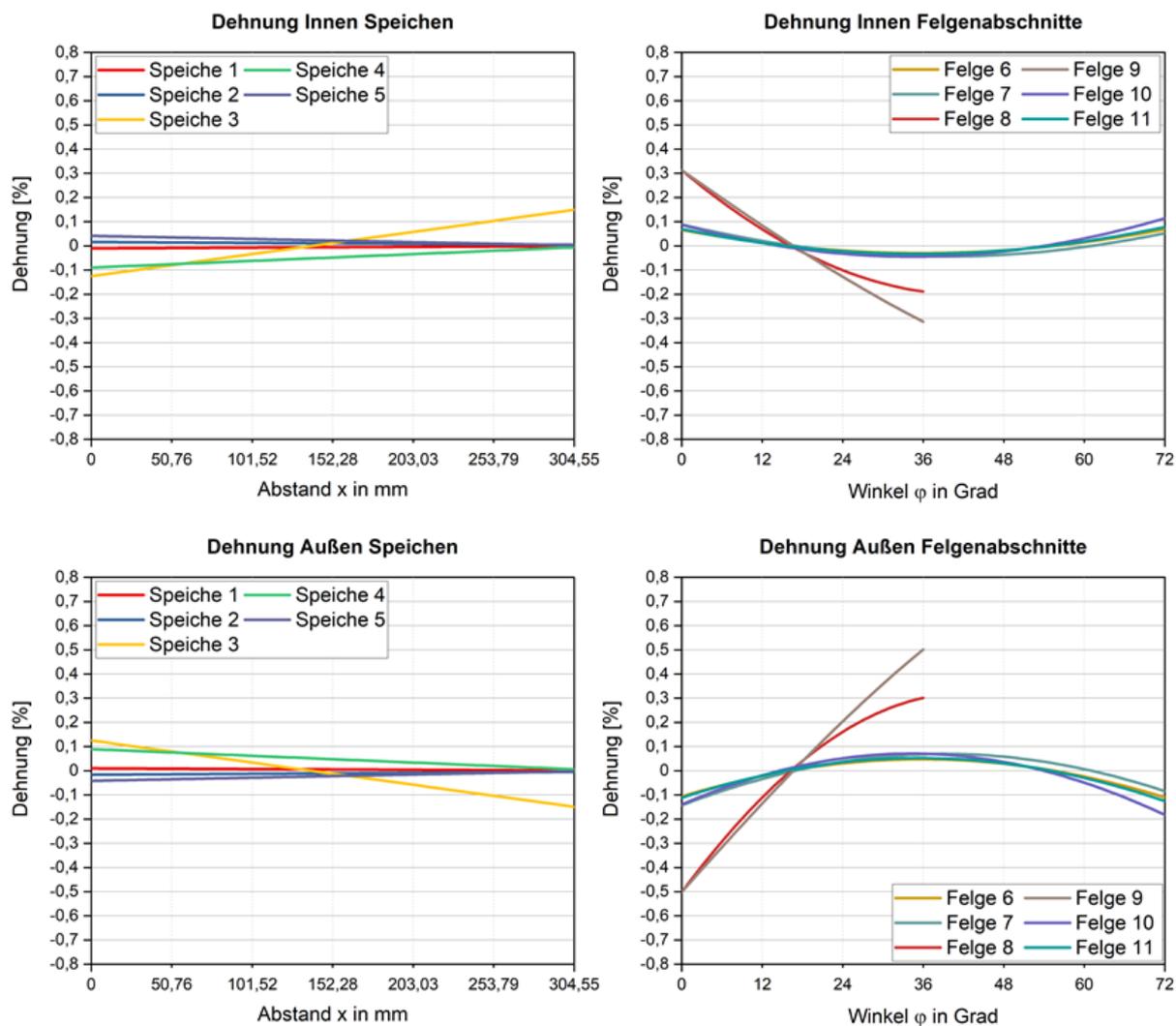
Die hier aufgelisteten Diagramme weichen auf der Y-Achse von den bisherigen Diagrammen ab. Darstellung von  $-0,8$  bis  $+0,8$  % anstatt bisher  $-0,3$  bis  $+0,3$  %.

### Kombination „F-14 / S12“



Die hier aufgelisteten Diagramme weichen auf der Y-Achse von den bisherigen Diagrammen ab. Darstellung von -0,8 bis +0,8 % anstatt bisher -0,3 bis +0,3 %.

## Kombination „F-14 / S32+20



Die hier aufgelisteten Diagramme weichen auf der Y-Achse von den bisherigen Diagrammen ab. Darstellung von  $-0,8$  bis  $+0,8$  % anstatt bisher  $-0,3$  bis  $+0,3$  %.

## Autor:innen



Thomas König ist seit 2017 bei der Mercedes Benz AG als Entwicklungsingenieur beschäftigt.

Zuvor absolvierte er eine Ausbildung zum Technischen Produktdesigner bei der Firma Kroeplin GmbH wo er danach die ersten Berufsjahre in der Konstruktion verbrachte. Auf eine berufsbegleitende Weiterbildung zum staatlich geprüften Techniker folgte, ein 2017 erfolgreich abgeschlossenes, ebenfalls berufsbegleitendes, Bachelorstudium „Maschinenbau“. Im Frühjahr 2021 schloss er das berufsbegleitende Masterstudium „Maschinenbau“ an der Wilhelm Büchner Hochschule erfolgreich ab.



Prof. Dr.-Ing Manfred Hahn ist seit September 2018 bei der WBH und vertritt den Maschinenbau im Bachelor- und Masterstudiengang, sowie den Bachelorstudiengang Maschinebau-Informatik. In der Lehre macht er sich in den analytischen Methoden der Technischen Mechanik und der Finite-Elemente-Methode stark. Im Weiteren liegen seine Kompetenzen in den analytischen Methoden des Leichtbaus und im Speziellen dem Faserverbundleichtbau. Studiert hat Herr Prof. Dr.-Ing M. Hahn Luft- und Raumfahrttechnik, weswegen er an der WBH außerdem dieses Gebiet mit in die Lehre einfließen lässt. Dazu gehören vor allem die Astronomie, die bemannte und unbemannte Raumfahrt und der Segelflug.

## Ansprechpartner:innen

Prof. Dr.-Ing Manfred Hahn

Wilhelm Büchner Hochschule, Hilpertstrasse 31, D-64295 Darmstadt, Germany,

E-Mail: [Manfred.Hahn@wb-fernstudium.de](mailto:Manfred.Hahn@wb-fernstudium.de)

## **Überblick über die Ausgaben der Schriftenreihe**

Ausgabe 1 / 2022: **Christoph Sternberg, Ralf Isenmann**

Untersuchung regionaler Besonderheiten im Individualverkehr bei ausgewählten deutschen Smart-City-Projekten

Ausgabe 2 / 2022: **Fabian Fries, Manfred Hahn**

Dynamik von Doppelstern-Systemen

Ausgabe 3 / 2022: **Stefan Kaden, Ralf Isenmann**

IT based Framework facilitating Technology Roadmapping striving for Sustainability

Ausgabe 4 / 2022: **Hannah Seibel, Manfred Hahn**

Von der Raupe zur Drohne –  
Leichtbau in Anlehnung an die Natur



Die Wilhelm Büchner Hochschule versteht sich als innovative, interdisziplinär ausgerichtete Hochschule für Technik. Unsere Kernbereiche sind Ingenieurwissenschaften, Informatik, Wirtschaftsingenieurwesen und Technologiemanagement sowie Energie-, Umwelt- und Verfahrenstechnik.

Eine Basis für die kontinuierliche Weiterentwicklung von Studiengängen stellt die anwendungsorientierte Forschung unter Einbindung aller Fachbereiche dar. Forschung an der Wilhelm Büchner Hochschule beinhaltet sowohl fachspezifische als auch fernstudien- und weiterbildungsspezifische Themen.

Unser vollständiges Leitbild und weitere Informationen finden Sie unter

[www.wb-fernstudium.de](http://www.wb-fernstudium.de)